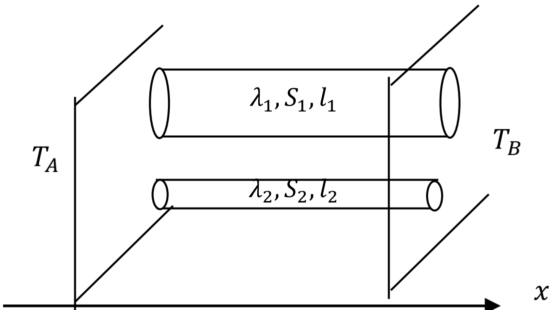
Conduction thermique seule

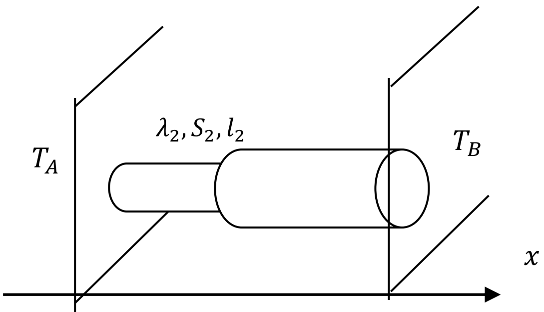
Activité 1 : Lois d'association des résistances

Soient deux matériaux thermostatés aux températures T_A et $T_B < T_A$ reliés par deux cylindres dont les conductivités thermiques, surfaces et longueurs respectives sont notées $\lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2, l_1$ et $l_2 = l_1$. Deux situations sont envisagées :

1^e^ situation :

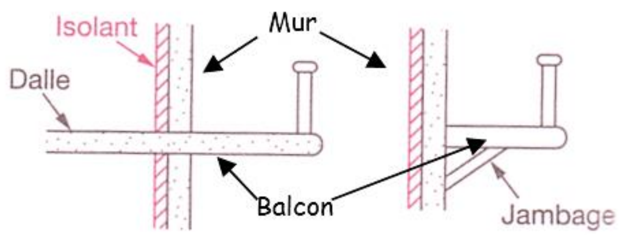


2^e^ situation :



Pour les deux situations, on envisage un régime stationnaire et la conduction thermique est le seul transfert thermique à envisager. La conduction thermique est unidirectionnelle et unidimensionnelle $\vec{j} = j(x)\vec{u_x}$.

1) Proposer une analogie électrique des deux situations ci-dessus.
2) Donner des exemples concrets pour lesquelles se rencontrent ces deux situations.
3) Exprimer, après démonstration, la résistance thermique équivalente pour les deux situations.
4) On envisage l'installation d'un balcon sur une maison. Quelle est la meilleure des deux solutions présentées ci-dessous ?



1) La 1^e^ modèle décrit la situation thermique pour laquelle des résistances thermiques sont en parallèles
   La 2^e^ modèle décrit la situation pour laquelle des résistances thermiques sont en séries
2) On peut penser à :

Résistances thermiques en parallèles	Résistances thermiques en série
Mur avec ouvertures (fenêtre, portes), situation avec ponts thermiques,…	Double vitrage, paroi avec plusieurs épaisseurs,

3) En régime stationnaire et pour cette situation unidirectionnelle et unidimensionnelle, lflux est stationnaire et uniforme et $P_{th} = jS = \lambda \frac{\Delta T}{l} S$ donc $R = \frac{l}{\lambda S}$.
   Lorsque les deux résistances sont en parallèle, on a :
   $T_A - T_B = R_1 P_{th1}$ et $T_A - T_B = R_2 P_{th2}$
   Avec un flux total donné par :

$$P = P_{th1} + P_{th2} = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2} = \Delta T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$P = \Delta T \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)$$

Soit une résistance équivalent donnée par :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}$$

La résistance de l'ensemble a tendance à être donc fixée par la « plus faible ».

Lorsque les deux résistances sont en série :

$$T_A - T_B = R_1 P_{th} + R_2 P_{th} = (R_1 + R_2) P_{th}$$

Donc :

$$R_{eq} = R_2 + R_1$$

La résistance de l'ensemble a tendance à être fixée par la plus grande.

4) Donc, en présence d'un pont thermique (résistance faible en parallèle), l'isolant n'a pas grande utilité car la résistance est fixée « par le matériau le moins isolant ». Il faut donc préférer la mise en série et donc l'utilisation d'un jambage.

Activité 2 : Simple et double vitrage

On considère une pièce à la température $T_i = 20°C$. La température extérieure est $T_e = 5°C$. La conduction thermique est le seul transfert thermique à envisager, le régime est stationnaire et on néglige les effets de bords (flux unidirectionnel et unidimensionnel).

- Simple vitrage

On étudie le transfert thermique à travers une vitre en verre de conductivité thermique $\lambda_v = 1 W.m^{-1}.K^{-1}$, de largeur 50cm, de longueur 60cm et d'épaisseur 3mm.

1) Calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire la puissance thermique perdue.

- Double vitrage

On remplace le simple vitrage par un double vitrage constitué de deux vitres (identiques à la précédente) renfermant une couche d'air de conductivité thermique $\lambda_{air} = 0{,}02 W.m^{-1}.K^{-1}$, d'épaisseur 30mm.

2) Calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire la puissance thermique perdue. Conclure.

- <u>Double vitrage avec lame d'Argon basse pression</u>

On conserve le double vitrage précédent en remplaçant la couche d'air par un gaz d'argon ${}^{40}_{18}Ar$ basse pression dont la conductivité associée est $\lambda_{Ar} = 0{,}01 W.m^{-1}.K^{-1}$.

3) A quelle famille du tableau périodique appartient l'argon. Donner la composition de son noyau. Donner également sa configuration électronique.
4) Calculer la puissance perdue. Conclure.

<u>Pour le simple vitrage :</u>

Comme pour l'exercice précédent la résistance thermique est donnée par : $R = \frac{l}{\lambda S}$ et l'on trouve alors :

$$R_{verre} = \frac{0{,}003}{1 \times 0{,}30} \approx \frac{3 \times 10^{-1}}{30} = 10^{-2} K/W$$

On trouve alors le flux thermique :

$$P = \frac{\Delta T}{R_{verre}} = 1{,}5 kW$$

<u>Pour le double vitrage :</u>

Les résistances sont en série et :

$$R_{eq} = 2R_{verre} + R_{air}$$

$$R_{eq} = 2 \times 10^{-2} + \frac{0{,}03}{0{,}02 \times 0{,}3} \approx 5 K/W$$

La résistance est principalement liée à la lame d'air (qui est dans le pratique un gaz d'argon à basse pression)

$$P = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = 3W$$

On note la très bonne efficacité du double vitrage.

A noter que nous sommes maintenant à du triple vitrage !

Pour le double vitrage d'argon :

L'argon appartient à la famille des gaz nobles, cet atome est constitué de 40 nucléons, 18 protons et 22 neutrons et sa configuration électronique est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$

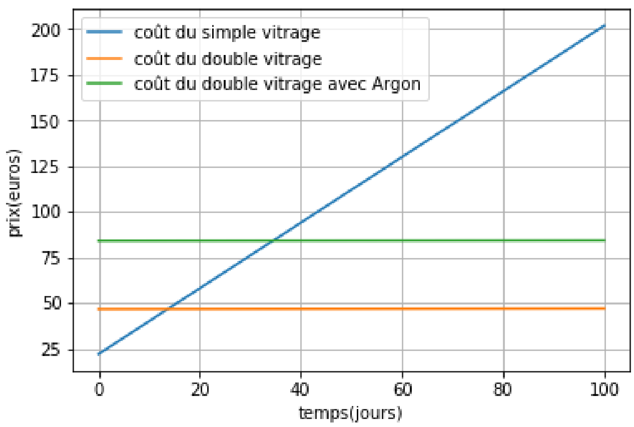
La conductivité de l'argon étant deux fois moindre que celle de la lame d'air précédente alors $R_{eq} = 10 K/W$.

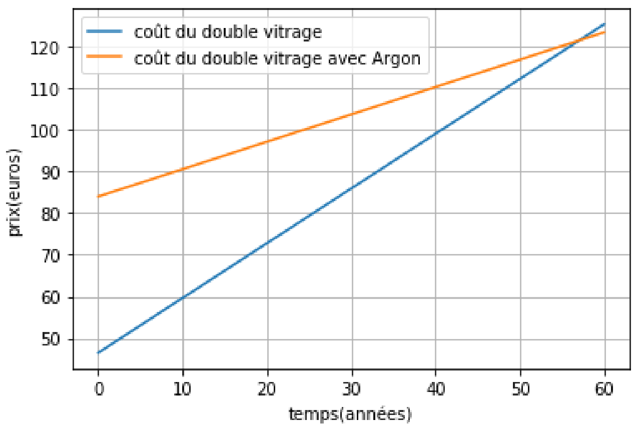
$$P = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = 1{,}5 W$$

Voici quelques prix :

	Prix minimum au m²	Prix moyen au m²	Prix maximum au m²
Simple vitrage	65 €	73 €	80 €
Double vitrage	70 €	155 €	240 €
Double vitrage anti-effraction	150 €	200 €	250 €
Double vitrage renforcé à lame argon	210 €	280 €	350 €

Pour une fenêtre de 0,3m² et avec les puissances calculer, on trouver le temps pour lequel l'achat d'un double vitrage argon devient rentable :



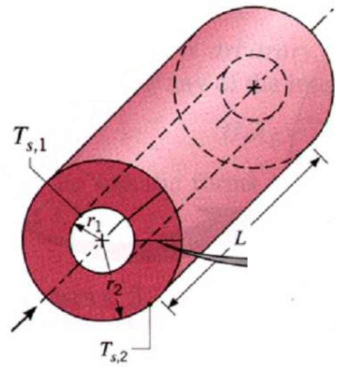


Activité 3 : Résistance thermique entre deux cylindres coaxiaux

On considère un matériau conducteur compris entre deux cylindres coaxiaux, de rayon r_1 et $r_2 > r_1$, de conductivité λ et de longueur L suffisamment grande pour pouvoir négliger les effets de bords. Dans toute la suite, on se place en régime stationnaire. La conduction thermique est le seul transfert thermique à envisager.

a) Calcul de la conductivité thermique linéique

Dans ce paragraphe, nous supposerons que les parois de ce matériau sont maintenues constantes : température $T_{S,1}$ pour $r = r_1$ et température $T_{S,2}$ pour $r = r_2$.



On travaillera dans un repérage cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z}$ confondu avec l'axe du cylindre. Dans ces conditions, le vecteur densité de flux thermique est tel que $\vec{j} = j(r)\overrightarrow{u_r}$.

1) Donner l'expression de la résistance thermique R_{th} associée à ce cylindre en fonction de λ, r_1, r_2 et L.
2) Montrer que la puissance linéique $P_{th,l}$ échangée par le cylindre avec l'extérieur est donnée par :
$$P_{th,l} = -G_{th,l}(T_{S,1} - T_{S,2})$$
Où $G_{th,l}$ est la conductance linéique à exprimer en fonction des données du sujet.

b) Applications

Le dispositif précédent est utilisé en Island afin de transporter l'eau chaude des geysers vers la capitale (constituant ainsi une source d'eau chaude utilisable).

Conduite islandaise permettant le cheminement des eaux chaudes des geysers

Nous supposerons que la température T de l'eau est uniforme sur chaque section droite de la canalisation (pour $r \leq r_1$), ainsi le champ des températures de l'eau est tel que $T = T(z)$. On a $T(0) = 350K$. On note $T_{ext} = 300K$ la température extérieure. La canalisation est de section constante et horizontale et le siège d'un écoulement stationnaire dont le débit massique est $D_m = 50kg.s^{-1}$. On note $c = 4000J.K^{-1}.kg^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau. On a : $r_2 = 40cm; r_1 = 30cm; \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx \frac{\pi}{10}; \ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0,2; \lambda = 0,5W.K^{-1}.m^{-1}$

3) Appliquer le 1[e] principe des systèmes en écoulement entre deux sections droites distantes de dz et montrer que :
$$\frac{dT}{dz} + \frac{T}{\delta} = \frac{T_{ext}}{\delta}$$
On donnera l'expression puis la valeur de δ.
4) Déterminer la distance L pour laquelle la température $T(L) = 340K$.

En régime stationnaire le flux est conservatif et $P = Cte$:

$$P = j(r) \times 2\pi r L = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L$$

Donc : $dT = \frac{-dr}{2\pi\lambda L r} P$ et $\Delta T = \frac{1}{2\pi\lambda L} ln\frac{r_2}{r_1} \times P$

Donc : $R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda L} ln\frac{r_2}{r_1}$

La conductance linéique est $G_{th,l} = \frac{2\pi\lambda}{ln\frac{r_2}{r_1}}$

Si on applique le 1[e] principe des systèmes en écoulement de manière locale :

$$D_m d_s h = -G_{th,l}(T(z) - T_{ext})$$

$$\frac{dT}{dz} + \frac{G_{th,l}T}{D_m c} = \frac{G_{th,l}T_{ext}}{D_m c}$$

On en déduit une distance caractéristique de variation de la température :

$$\delta = \frac{D_m c}{2\pi\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{50 * 4000 * \pi}{2\pi * 0.5 * 10} = 20km$$

$$T(z) = (T(0) - T_{ext})e^{-\frac{z}{\delta}} + T_{ext}$$

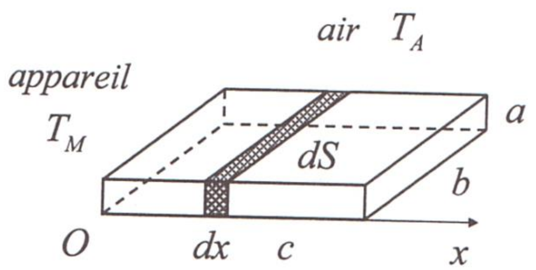
$$T(L) = (T(0) - T_{ext})e^{-\frac{L}{\delta}} + T_{ext}$$

$$L = \delta \ln\left(\frac{(T(0) - T_{ext})}{T(L) - T_{ext}}\right) = 4km$$

Activité 4 : Ailette de refroidissement

Pour éviter un échauffement trop important des appareils électriques, dû à l'effet Joule, on munit l'arrière de leur boitier d'ailettes de refroidissement métalliques.

Dans note cas, chaque ailette est parallélépipédique, d'épaisseur $a = 1mm$, de largeur $b = 10cm$ et de longueur $c = 10cm$. Dans les calculs on admettra que $a \ll b$.



En fonctionnement stationnaire, le boîtier de l'appareil maintient une température $T_M = 60°C$. L'air extérieur est à température constante et uniforme $T_A = 20°C$, sauf au voisinage immédiat de l'ailette, entourée d'une couche limite d'air vérifiant la loi de Newton dont le coefficient de transfert conducto-convectif est $h = 250W.m^{-2}.K^{-1}$. Dans l'ailette, on admet que la conduction thermique est monodimensionnelle et unidirectionnelle suivant Ox, la loi de Fourier s'applique et la conductivité est $\lambda = 50W.m^{-1}.K^{-1}$.

1) Ecrire le bilan en régime stationnaire des échanges thermiques d'une tranche de l'ailette de largeur dx. En déduire que la température $T(x)$ est la solution de l'équation différentielle : $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_A}{\delta^2}$.
2) Interpréter la quantité δ à l'aide d'une analyse dimensionnelle.
3) Calculer δ puis justifier que $T(c) \approx T_A$.
4) Résoudre l'équation différentielle précédente et donner l'expression simplifiée de $T(x)$ en prenant en considération l'inégalité entre δ et c.
5) Exprimer par deux méthodes puis calculer numériquement la puissance thermique totale P évacuée par une ailette.
6) Combien faudrait-il fixer d'ailettes sur le boîtier pour évacuer une puissance totale $P_{tot} = 200W$?

En régime stationnaire, le flux rentrant dans $dx \times b \times a$ et le flux sortant sont égaux :

$$-\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_x \times ab = 2h(T(x) - T_A)(b + a)dx - \lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} \times ab$$

D'où :

$$\lambda ab\frac{d^2T}{dx^2}dx - 2h(T(x) - T_A)(b + a)dx = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a}(T(x) - T_A) = 0$$

Soit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{(T(x) - T_A)}{\delta^2} = 0$$

$$\delta^2 = \frac{\lambda a}{2h}$$

D'où $\delta = \sqrt{\frac{50\times10^{-3}}{2\times250}} \approx 1cm \ll c : T(c) \approx T_A$

Ainsi :$T(x) = T_A + Aexp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + Bexp\left(\frac{x}{\delta}\right)$

Avec $T(c) = T_A$, on a $B = 0$

$$T(x) = T_A + (T_M - T_A)exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

Donc la puissance P évacuée, qui s'identifie à la puissance P' (par continuité du flux en $x = 0$), est donnée par :

$$P = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} ab = \frac{\lambda(T_M - T_A)ab}{\delta}$$

Ou encore par :

$$P = \int_0^c 2h\,b(T(x) - T_A)dx = \int_0^c 2h\,b(T_M - T_A)exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)dx$$

$$P \approx 2hb(T_M - T_A)\delta$$

$$P = \frac{\lambda ab}{\delta}(T_M - T_A)$$

Donc $P \approx \frac{50\times10^{-3}\times10^{-1}\times40}{10^{-2}} \approx 20W$

Il faut donc 10 ailettes de ce type.

Activité 5 : Echangeur thermique (**)

On considère un tube métallique cylindrique d'axe Oz, de longueur L, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2, de conductivité thermique λ. A l'intérieur de ce tube est contenue de l'eau en écoulement dont la température est $T(z)$.

L'air à l'extérieur de la structure est à température constante T_0. Les échanges thermiques à l'interface eau/paroi intérieure (respectivement paroi extérieur/air) sont modélisés par la loi de Newton avec le coefficient d'échange h_1 (respectivement h_2). On supposera que les échanges thermiques se font uniquement suivant $\vec{u_r}$ (vecteur unitaire radial). Tous les transferts thermiques sont supposés stationnaires. On donne : $\lambda = 0{,}10W.m^{-1}K^{-1}, h_1 = 50W.m^{-2}K^{-1}, h_2 = 25W.m^{-2}K^{-1}, R_1 = 30cm, R_2 = 40cm$ et $T_0 = 293K$,

1) Déterminer puis calculer la résistance linéique R_L de la canalisation.
2) En appliquant le premier principe des systèmes en écoulement, déterminer la longueur L du tube limitant un refroidissement de 10% de l'eau. Le débit massique est $D_m = 100kg/s$ et la capacité thermique massique de l'eau est $c = 4000J/K/kg$. On négligera les variations d'énergies potentielle et $T(z = 0) = 363K$

Dans ce problème, nous avons trois résistances (linéiques) en série :

- Résistance linéique eau-paroi liée à un échange conducto-convectif : $\frac{1}{2\pi R_1 h_1}$
- Résistance linéique de conduction thermique : $\frac{ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda}$
- Résistance paroi-air liée à un échange conducto-convectif : $\frac{1}{2\pi R_2 h_2}$

Donc la résistance linéique totale est :

$$R_l \approx 0{,}48K/W$$

Donc le premier principe de la thermodynamique des systèmes en écoulement entre z et $z + dz$:

$$h(z + dz) - h(z) = \delta q < 0$$

$$D_m(h(z + dz) - h(z)) = dP < 0$$

$$D_m c(T(z + dz) - T(z)) = dz(T_0 - T(z))/R_l$$

$$\frac{dT}{dz} + \frac{T}{cR_l D_m} = \frac{T_0}{cR_l D_m}$$

Donc : $\delta = cR_l D_m \approx 200km$

Donc : $T(z) = (T(0) - T_0)exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) + T_0$

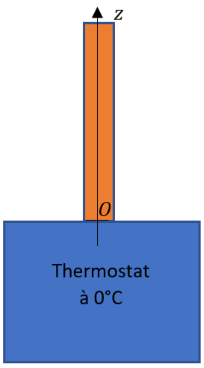
On veut :

$$\frac{T(L) - T(0)}{T(0)} = \frac{(T(0) - T_0)exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) + T_0 - T(0)}{T(0)} = -0{,}1$$

$$L = -\delta \ln\left(\frac{T(0) - 0{,}1T(0) - T_0}{(T(0) - T_0)}\right) = 142km$$

Activité 6 : Etude expérimentale d'une ailette de refroidissement

On considère une tige en acier dont une extrémité est plongée dans un bain d'eau glacée thermostatée dans un calorimètre à $T_0 = 0°C$. Le reste de la tige est au contact de l'air extérieur supposé également à une température T_{ext} constante et uniforme.

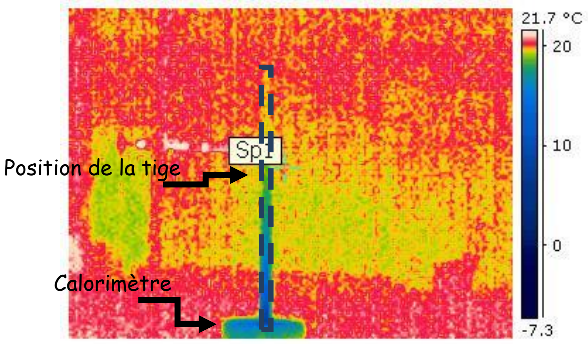


On note $T(z,t)$ le champ des températures le long de la tige cylindrique de rayon a et de longueur $L \gg a$, λ sa conductivité thermique, h le coefficient définissant le transfert conducto-convectif entre la tige et l'extérieur.

On donne les valeurs approchées suivantes : $L \approx 1{,}0m, a \approx 0{,}50cm, \lambda \approx 50W.K^{-1}.m^{-1}, h \approx 10W.m^{-2}.K^{-1}, c \approx 450J.K^{-1}.kg^{-1}$.

On suppose le régime stationnaire atteint.

1) Montrer, à l'aide d'un bilan enthalpique local, que $\frac{d^2T}{dz} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_{ext}}{\delta^2}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$
2) Comparer les valeurs numériques de δ et L puis interpréter la photo obtenue à l'aide d'une caméra thermique.



3) Montrer alors que : $T(z) \approx T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{-\frac{z}{\delta}}$
4) Proposer un protocole puis une exploitation de vos mesures permettant de tester l'expression de $T(z)$ obtenue. En déduire alors une estimation de la distance δ caractéristique de la variation de la température en utilisant le fichier th_chap8_exo6.py à disposition.

En régime stationnaire, le flux rentrant dans $dx \times b \times a$ et le flux sortant sont égaux :

$$\lambda\left(\frac{dT}{dz}\right)_z \times \pi a^2 = -2h(T(x) - T_{ext})2\pi a dx + \lambda\left(\frac{dT}{dz}\right)_{z+dz} \times \pi a^2$$

Soit : $\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{(T(x)-T_{ext})}{\delta^2} = 0$

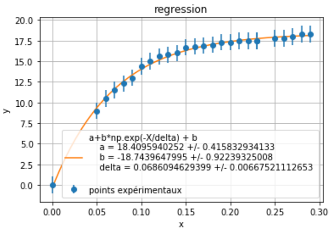
$$\delta^2 = \frac{\lambda a}{2h}$$

D'où $\delta = \sqrt{\frac{50\times5*10^{-3}}{2\times10}} \approx 10cm \approx L/10$. Sur la photographie, on remarque que l'extrémité de la tige est à température ambiante.

L'évolution exponentielle imposée à la température impose uniquement une exponentielle décroissante.

Aves les conditions aux limites, on a $T(z) \approx T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{-\frac{z}{\delta}}$

Grille de compétences	/1	/2	/3	/4
Analyser				
Réfléchir à un protocole permettant de tester l'expression de $T(z)$	Il suffit de mesurer la température sur la tige tous les cm			
Analyser la fonction Regression_MC et identifier ce qu'elle retourne	On va chercher la courbe d'ajustement : $T(z) \approx T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{-\frac{z}{\delta}}$ Par identification : $a \equiv T_{ext}$ $b \equiv (T_0 - T_{ext})$ $delta \equiv \delta$			
Réaliser				
Savoir effectuer des mesures avec le matériel à	Pour une manipulation réussie, il faut prendre un nombre de points suffisant et bien plaquer le capteur sur la tige (et			

disposition	sans le toucher directement !)
Valider	
Obtenir la régression	
Communiquer	
Proposer une analyse de ses résultats.	On trouve donc : $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} \approx 7cm$ On retrouve l'ordre de grandeur de nos hypothèses

Equation de la chaleur

Activité 7 : Etude d'une tige calorifugée

Dans la suite, les tableaux devront suivre des opérations matricielles. Voici quelques opérations matricielles courantes sur Python :

```
import numpy as np
tab=np.array([[0,1],[2,3]])
Mat=np.matrix([[0,1],[2,3]])
print (tab*tab)#multiplication élément par élément
print(Mat*Mat)#produit qui suit les règles du
calcul matriciel
print(np.asmatrix(tab)*np.asmatrix(tab))#np.asmatr
ix permet la conversion d'un tableau numpy en
matrice
print(np.dot(tab,tab))#produit matricielle imposé
aux tableaux numpy
print(np.linalg.inv(tab))#calcul de l'inverse
d'une matrice et même d'un tableau
```

Les systèmes d'équations rencontrés seront alors notés $Ax = b$ où A est une matrice carrée, d'ordre n, inversible ou régulière (il existe A^{-1} tel que $AA^{-1} = I \leftrightarrow detA \neq 0$) et b un vecteur colonne de taille n. Pour résoudre de tels systèmes d'équations, on a :

```
print(np.linalg.solve(A,b))# résolve l'équation
Ax=b
```

On considère une tige métallique de longueur L, de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique c. Cette tige cylindrique est entièrement calorifugée. On note $T(x,t)$ le champ des températures de cette tige. Initialement, le profil des températures est linéaire :

$$T(x,0) = T_{max} - \frac{(T_{max} - T_{min})}{L}x$$

Cette tige est alors le siège d'un phénomène de conduction thermique unidirectionnel selon son axe Ox.

Dans ces conditions, un bilan thermique dans la tige aboutit à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

A noter que le bilan enthalpique aux extrémités est différent et conduit à :

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0} = \frac{\lambda}{\rho c}\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0,}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right|_{x=L} = -\frac{\lambda}{\rho c}\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}$$

Dans la suite, on prendra $\lambda = 500W.K^{-1}.m^{-1}, c = 1000J.K^{-1}.kg^{-1}, L = 1m$, $T_{max} = 60°C$, $T_{min} = 20°C$ et $\rho = 10^4 kg.m^{-3}$.

L'analyse numérique aboutit à discrétiser le temps avec un pas $t_e = 10s$ et l'espace avec un pas $\delta = 10cm$. L'analyse sera effectuée pendant une durée de 10000s (on note $N_t = 1000$ le nombre d'échantillons temporels).

Pour chaque élément de la tige de longueur δ on a une température $T_{x_i}[t_j]$ où $x_i = i\delta$ et $t_j = jt_e$ avec i et j entiers. On note N_x le nombre d'éléments à considérer sur la tige.

1) Ecrire la dérivée partielle $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ selon une formule de différence finie centrée d'ordre 2.
2) En déduire alors que pour chaque élément on a :
$$\frac{dT_{x_i}[t_j]}{dt} = K(T_{i+1}[t_j] + T_{i-1}[t_j] - 2T_i[t_j])$$
Avec K une constante à exprimer en fonction des constantes du sujet.

Ce problème se ramène à celui d'un problème de Cauchy du type

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \vec{F}(t,\vec{T}) \text{ où } \vec{T}(t) = \begin{pmatrix} T_{i=0}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i(t) \\ \vdots \\ T_{N_{x-1}}(t) \end{pmatrix}$$

3) Proposer un schéma d'Euler implicite pour résoudre ce problème et montrer alors que $M\vec{T}(t_{j+1}) = \vec{T}(t_j)$ où M est une matrice carrée $N_x \times N_x$.
4) Obtenir, sur python, un tableau T de dimension (N_x, N_t) décrivant l'évolution spatio-temporelle de la température.
5) Obtenir enfin la représentation temporelle sur un même graphe des températures de chaque cellule.

1) $\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{T[x_{i+1},t_j] - T[x_i,t_j]}{\delta}$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T[x_{i+1},t_j] + T[x_{i-1},t_j] - 2T[x_i,t_j]}{\delta^2}$$

2) La température $T_{x_i}(t)$ d'une cellule dans la tige vérifie alors $\frac{dT_{x_i}(t)}{dt} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{T_{x_{i+1}}(t) + T_{x_{i-1}}(t) - 2T_{x_i}(t)}{\delta^2}$. A noter que $\frac{dT_{x_0}(t)}{dt} = \frac{\lambda(T_{x1}(t) - T_{x0}(t))}{\rho c\delta^2}$ et $\frac{dT_{x_{N-1}}(t)}{dt} = \frac{\lambda(T_{x_{N-2}}(t) - T_{x_{N-1}}(t))}{\rho c\delta^2}$

On a donc bien un problème de Cauchy où $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} T_{i=0}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i(t) \\ \vdots \\ T_{N_{x-1}}(t) \end{pmatrix}$

est un vecteur colonne dont chaque terme est associé à la température d'un élément de la tige mesurée à un instant t et

$$\vec{F}(t,\vec{A}) = \begin{pmatrix} -K & K & & & & \\ K & -2K & K & & & \\ & K & -2K & K & & \\ & & K & -2K & K & \\ & & & \cdots & & \\ & & & K & -2K & K \\ & & & & K & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{i=0}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i(t) \\ \vdots \\ T_{N_{x-1}}(t) \end{pmatrix}$$

avec $K = \frac{\lambda}{\rho c \delta^2}$

3) Pour un schéma d'Euler implicite :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T_{i=0}(t_j) \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i(t_j) \\ \vdots \\ T_L(t_j) \end{pmatrix} = \vec{F}\left(t_{j+1}, \vec{A}(t_{j+1})\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1+K & -K & & & & \\ -K & 1+2K & -K & & & \\ & -K & 1+2K & -K & & \\ & & -K & 1+2K & K & \\ & & & \cdots & & \\ & & & -K & 1+2K & -K \\ & & & & -K & 1+K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{i=0}(t_{j+1}) \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i(t_{j+1}) \\ \vdots \\ T_L(t_{j+1}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_{i=0}(t_j) \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i(t_j) \\ \vdots \\ T_L(t_j) \end{pmatrix}$$

On calcule alors facilement l'inverse de M sur python ou calculer suivant la méthode du pivot de Gauss

Rq :On peut apprécier la stabilité de ce schéma (qui est revanche plus délicat à manipuler) :

$$T_i(t_{j+1}) - T_i(t_j) = T_e\left(KT_{i-1}(t_{j+1}) - 2KT_i(t_{j+1}) + KT_{i+1}(t_{j+1})\right)$$

Si : $T_{i-1}(t_{j+1}) = T_{i+1}(t_{j+1}) = 0$ alors $T_i(t_{j+1}) = \frac{T_i(t_j)}{1+2K} = \frac{T_i(t_0)}{(1+2K)^j}$ ce qui non divergent dans tous les cas.

```
#constante"
lamb =500
pau=10**4
c=1000
L=1
Nx=10
delta=L/Nx
duree=10000
Nt=1000
Te=duree/Nt
K=lamb*Te/(pau*c*delta**2)
Tc=60
Tf=20
Tinitial=25

#méthode d'euler implicite
A=np.zeros((Nx,Nx))
A[0,0]=1+K
A[0,1]=-K
A[Nx-1,Nx-1]=1+K
A[Nx-1,Nx-2]=-K

for i in range (1,Nx-1):
    A[i,i]=1+2*K
    A[i,i-1]=A[i,i+1]=-K
#calcul de l'inverse de A
Ai=np.linalg.inv(A)

#calcul du champ des températures
x=np.linspace(0,L,Nx)
T=np.zeros((Nx,Nt))
T[:,0]=Tc-(Tc-Tf)/L*x[:]

for i in range (Nt-1):
    T[:,i+1]=np.dot(Ai,T[:,i])
```

```
print(T)
"""tracés"""

#évolution temporelle de quelques températures en différents points
for i in range(Nx):
    plt.plot(np.linspace(0,duree,Nt),T[i,:])
    plt.xlabel("temps")
    plt.ylabel("température(°C)")
    plt.title("température à différentes positions")
plt.show()
#température aux extrémités en régime établi
plt.plot(np.linspace(0,L,Nx),T[:,Nt-1])
plt.xlabel("position")
plt.ylabel("température à différentes positions")
plt.title("température à différentes positions en regime établi")
plt.show()
```