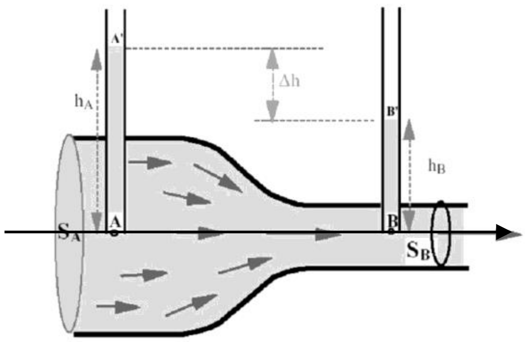
Ecoulement conservatif de fluides parfaits et incompressibles

Activité 1 : Débitmètre de venturi

Un écoulement homogène, stationnaire d'un fluide supposé parfait et incompressible de masse volumique ρ_0 s'établit dans une conduite horizontale de section variable (S_A en amont et S_B en aval) et percée de deux cheminées latérales. On pourra considérer que les champs des vitesses et des pressions sont uniformes sur chaque section droite de la canalisation. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.



1) Justifier la conservation du débit volumique D_v le long de la conduite.
2) Ecrire l'équation traduisant la conservation du débit volumique D_v. On note c_A et c_B la vitesse de l'écoulement respectivement en A et B.
3) Ecrire la relation de Bernoulli sur la ligne de courant AB.
4) Montrer que ce dispositif constitue un débitmètre si l'on connaît les valeurs de S_A, S_B, h.

Les différentes hypothèses de l'écoulement permettent d'utiliser la relation de Bernoulli entre l'amont et l'aval :

$$\frac{P_A}{\rho}+\frac{c_A^2}{2}+gz_A=\frac{P_B}{\rho}+\frac{c_B^2}{2}+gz_B$$

$$\frac{P_A}{\rho}+\frac{c_A^2}{2}=\frac{P_B}{\rho}+\frac{c_B^2}{2}$$

On a aussi, par l'incompressibilité du fluide, la conservation de du débit volumique : $c_AS_A=c_BS_B$

La loi de la statique des fluides est valable pour caractériser la loi donnant l'évolution verticale de la pression :

$$P_A-P_B=\rho g\Delta h$$

Donc :

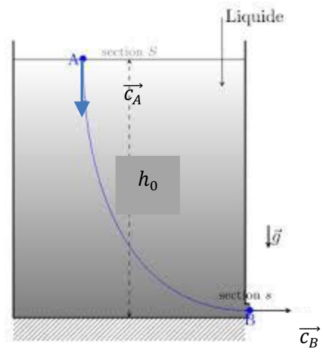
$$gh+\frac{c_A^2}{2}=\frac{c_A^2S^2}{2s^2}$$

D'où $D_v=sS\sqrt{\frac{2gh}{S^2-s^2}}$

A noter qu'en l'absence d'écoulement $h=0$ et on retrouve le principe des vases communicants.

Activité 2 : Vidange d'un réservoir

On considère un réservoir alimenté continument en eau (par un robinet non représenté ici) assurant ainsi un niveau d'eau constant. L'eau est assimilée à un fluide parfait, incompressible (de masse volumique ρ) et l'écoulement est stationnaire. On note P_0 la pression atmosphérique. On a également la section $S\gg s$. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

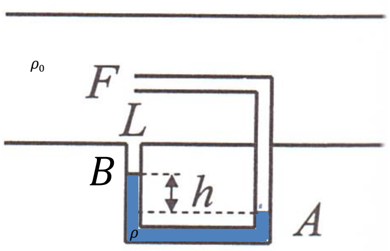


1) Justifier qu'il existe une relation entre S, s, c_B (vitesse de l'écoulement en B) et c_A (vitesse de l'écoulement A).
2) Appliquer Bernoulli sur la ligne de courant AB et proposer une écriture approchée de ce théorème.
3) Exprimer la vitesse c_B en fonction de h. Analyser votre résultat.

Activité 3 : Tube de Pitot à prise frontale

Le tube de Pitot est utilisé comme instrument de vol pour la mesure de la vitesse des avions. Ce capteur est placé sur le fuselage. Dans cet exercice, nous nous placerons dans le référentiel lié à l'avion.

Cette sonde cylindrique baigne dans un écoulement d'air stationnaire. L'air est considéré comme étant un fluide parfait, de masse volumique ρ_0 uniforme et de vitesse $\vec{v}$ parallèle à l'axe de la sonde.



La sonde est munie d'une prise frontale (entrée F, point d'arrêt de vitesse nul) et d'une prise latérale (entrée L) contenant du mercure de masse volumique $\rho \gg \rho_0$ (qui se stabilise avec une dénivellation h).

Montrer, en justifiant les éventuelles approximations, que la vitesse v de l'avion peut être déterminée en connaissant la valeur de h.

En appliquant Bernoulli pour les lignes de courant arrivant en F, on a :

$$\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} = \frac{P_F}{\rho_0} + 0$$

Le rapport des masses volumique permet d'écrire :

$$P_F \approx P_A$$

$$P_L = P_0 \approx P_B$$

Et d'après la loi de la statique des fluides :

$$P_F \approx P_0 + \rho g h$$

Donc $\frac{v^2}{2} \approx \frac{\rho g h}{\rho_0}$ et alors $v \approx \sqrt{2\frac{\rho g h}{\rho_0}} \approx 300 km.h^{-1}$

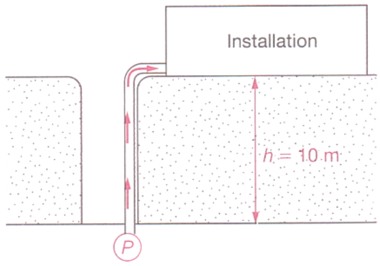
Il s'agit d'un ordre de grandeur d'un avion au décollage ou à l'atterrissage. L'hypothèse d'un gaz incompressible est à remettre en cause pour des vitesses supersoniques.

Avec un sèche-cheveux, on observe typiquement $h \approx 1cm$ et donc $v \approx \sqrt{2\frac{\rho g h}{\rho_0}} \approx 10 m.s^{-1}$

Ecoulement non conservatif de fluides parfaits et incompressibles

Activité 4 : problème de physique

Une pompe immergée à 10m sous terre doit permettre de remonter de l'eau stagnante dans une installation située à la surface. La pression du liquide au niveau du captage est voisine de la pression atmosphérique et on désire un débit volumique égale à $D_v = 7m^3.h^{-1}$ avec, dans l'installation, une pression supérieure à la pression atmosphérique de 2,5 bar. Les sections des conduites sont identiques et on se place en régime stationnaire.



Donner une estimation grossière, visant à dégager un ordre de grandeur de la puissance indiquée minimale P_i de la pompe.

Il s'agit ensuite d'un écoulement non conservatif pour lequel la relation de Bernoulli donne :

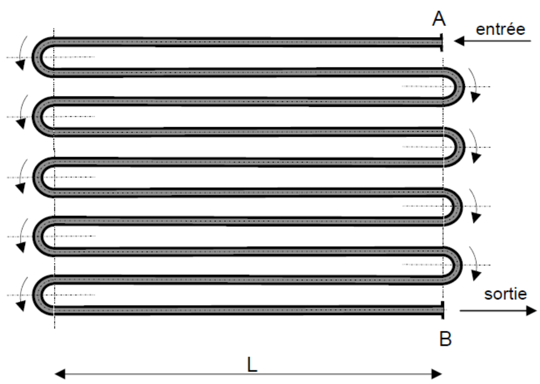
$$P = \rho D_v \left(\left(\frac{P_s}{\rho} + gh \right) - \left(\frac{P_0}{\rho} \right) \right) \approx 700W$$

Avec $P_s \approx 3{,}5 bar$

Ecoulement non conservatif de fluides réels et incompressibles

Exercice 6 : Pertes de charges singulières et régulières

On considère un circuit hydraulique d'un plancher chauffant. L'eau chaude transite horizontalement dans ce circuit constitué de canalisations de section constante, de diamètre intérieur $d = 20mm$ et constitué de plusieurs tubes de longueur respective $L = 6m$.



On cherche à conditionner la pompe permettant d'assurer un débit volumique $D_v = 0{,}3L/s$ en régime stationnaire. On note c la vitesse débitante permettant d'écrire ce débit tel que $D_v = cS$. L'eau est supposée incompressible et de masse volumique ρ. On prend en compte le caractère visqueux de l'eau : sa viscosité est $\eta = 10^{-3} N.s.m^{-2}$.

La canalisation est réalisée dans un matériau inoxydable dont la taille caractéristique des imperfections est $\varepsilon = 1mm$. On détermine le coefficient de perte de charge de charge régulière f à l'aide du diagramme de Moody (cf. fin TD). Ce coefficient est aussi donné par $f = \frac{2|\Delta P|d}{\rho L c^2}$ où $|\Delta P|$ mesure la diminution de pression sur une longueur L. $|\Delta P|$ est aussi fonction du régime d'écoulement (laminaire (lent) ou turbulent (rapide)) que l'on distingue avec le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho c}{\eta} d$.

1) Estimer la perte de pression $|\Delta P|$, appelée de pertes de charges régulières, qui s'observe le long des tuyaux de longueur L.

Chaque coude est responsable de pertes de charge singulière et la chute de pression suit la loi $\rho K \frac{c^2}{2}$ avec $K = 0{,}48$.

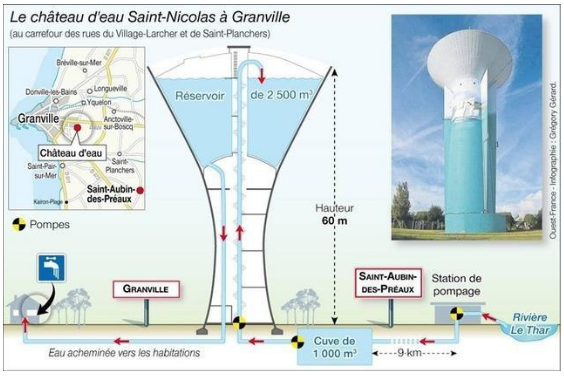
2) Calculer la chute de pression totale $|\Delta P|'$ liée à ces pertes de charges singulières.
3) Calculer le travail massique des forces de frottement sur toute la canalisation.
4) Quelle est puissance doit fournir un compresseur pour compenser ces pertes ? Commenter.

1) Le nombre de Reynolds est $Re = \frac{\rho c}{\eta} d = 4\frac{\rho D_v}{\eta \pi d} \approx 20000$ et $\frac{\varepsilon}{d} = 0{,}05$
D'où $f \approx 0{,}072$ et $|\Delta P| = \frac{\rho L c^2 f}{2d} \approx 1bar$
2) Les 9 coudes sont responsables d'une chute de pression donnée par : $|\Delta P|' = 9\rho K \frac{c^2}{2} \approx 0{,}02bar$ ce qui est presque négligeable
3) Le travail massique associé à ces pertes de charge est : $\frac{|\Delta P|}{\rho} = -\omega_f$ donc $\omega_f \approx -100J/kg$
4) Et donc une puissance de $P = \rho D_v |\omega_f| \approx 30W$ Heureusement ce sont des faibles pertes !

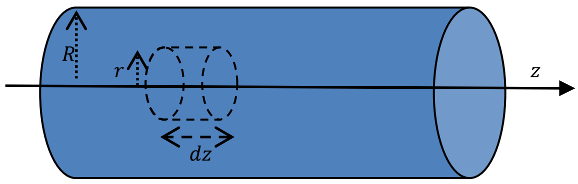
Activité 7 : Pertes de charge

Un château d'eau permet :

- De stocker de l'eau en cas de besoins immédiats (pour les pompiers par exemple)
- D'assurer un débit suffisant jusqu'aux habitations malgré la viscosité de l'eau.



Nous allons étudier le phénomène de perte de charge régulière qui se produit dans la conduite horizontale reliant un château d'eau aux habitations.



L'écoulement considéré est stationnaire (nécessairement laminaire) et l'eau est assimilée à un fluide incompressible de viscosité η. La conduite est un cylindre horizontal de rayon R.

On décrit l'écoulement en réparage cylindrique. On suppose que le champ des vitesses présente une invariance par rotation autour de l'axe z, ainsi :

$$\vec{v} = v_z(r,z)\vec{u_z}$$

1) Justifier que le champ des vitesses soit indépendant de z.
2) Dessiner quelques lignes de champ, puis justifier qu'une particule de fluide soit animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Dans la suite, nous allons étudier une particule de fluide de géométrie cylindrique et centrée sur l'axe z (rayon r, longueur dz). Le mouvement rectiligne et uniforme de cette particule de fluide est assuré par la compensation de deux types de forces :

- Les forces pressantes (motrices)
- Les forces de viscosité (résistantes)

On néglige l'effet du poids, ce qui permet de considérer que le champ des pressions P ne dépend que de z.

3) Donner l'expression du bilan des force pressante $d\vec{F_p}$ s'exerçant sur la particule de fluide de volume $\pi r^2 dz$.

On donne l'expression de la force tangentielle $d\vec{F}$ de viscosité s'exerçant sur un élément de surface dS : $d\vec{F_\eta} = \eta \frac{dv_z}{dr} dS\vec{u}_z$

4) Donner l'expression de la force de viscosité $d\vec{F_\eta}$ s'exerçant sur la paroi latérale de la particule de fluide.
5) En déduire alors que $\frac{dP(z)}{dz} = \frac{2\eta}{r}\frac{dv(r)}{dr}$
6) Justifier que $P(z)$ soit une fonction affine et décoissante.

On note $\Delta P < 0$ la chute de pression sur une longueur L de canalisation.

7) Montrer alors que $v(r) = \frac{|\Delta P|}{4\eta L}(R^2 - r^2)$
8) Exprimer le débit volumique D_v à travers la canalisation et montrer alors que $|\Delta P| = R_h D_v$. On exprimera R_h en fonction des données du problème.

On considère un château d'eau permettant d'assurer un débit $D_v = 100 L.s^{-1}$ pour alimenter des habitations. La pression au niveau de ces habitations est de l'ordre de 1,5bar.

9) Estimer la résistance hydraulique de la canalisation principale.

Ecoulement stationnaire et fluide incompressible→ $div\vec{v} = 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$$d\vec{F_p} = \big(P(z) - P(z+dz)\big)\pi r^2 \vec{u}_z = -\frac{dP}{dz}\pi r^2 dz\vec{u}_z$$

$$d\vec{F_\eta} = 2\pi\eta r \frac{dv_z}{dr} dz\vec{u}_z$$

On a alors :

$$\frac{dP(z)}{dz} = \frac{2\eta}{r}\frac{dv(r)}{dr}$$

Il s'agit de l'égalité entre deux fonctions dépendant de variables différentes : l'égalité implique que ces quantités sont constantes.

L'application de Bernoulli impose à la pression de diminuer, donc $\frac{dP(z)}{dz} < 0$.

L'intégration donne alors :

$$\frac{2\eta}{r}\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{|\Delta P|}{L}$$

$$v(r) = -\frac{|\Delta P|}{4\eta L} r^2 + Cte$$

La nullité de la vitesse sur la conduite donne alors

$$v(r) = \frac{|\Delta P|}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

Le calcul du débit (vu au TD précédente) donne :

$$D_v = \frac{|\Delta P|}{4\eta L}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)2\pi = \frac{\Delta P}{8\eta L}\pi R^4$$

$$|\Delta P| = R_h D_v$$

$$R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

Dans notre cas : $R_h = \frac{|\Delta P|}{D_v} = 4{,}5 \times 10^6 Pa.s.m^{-3}$

Activité 8 : Problème de physique

Pour un même gradient de pression donné, par quel tuyau horizontal doit-on remplacer un tuyau de rayon R pour obtenir un débit volumique 10 fois plus important d'un fluide incompressible ?

D'après la formule de perte de charge précédente : $\Delta P = \frac{KD_v}{R^4}$

Donc pour un rapport 10 des débits : $10 = \frac{R_2^4}{R_1^4}$ ce qui conduit à un rapport de 1,8 entre les rayons

On note ici l'influence notable d'une faible variation du rayon de la canalisation.

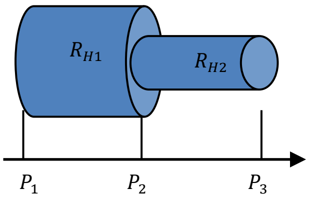
Activité 9 : Association de résistances hydrauliques

On considère un écoulement stationnaire d'un fluide réel incompressible vérifiant la loi de Poiseuille de perte de pression $\Delta P = R_h D_v$ où D_v est le débit volumique et R_h la résistance hydraulique.

1) Démontrer la loi d'association série de deux résistances hydrauliques. Représenter une portion de circuit hydraulique qui rend compte de deux résistances hydrauliques différentes en séries
2) Démontrer la loi d'association parallèle de deux résistances hydrauliques. Représenter une portion de circuit hydraulique qui rend compte de deux résistances hydrauliques différentes en parallèles.

Loi d'association de deux résistances :

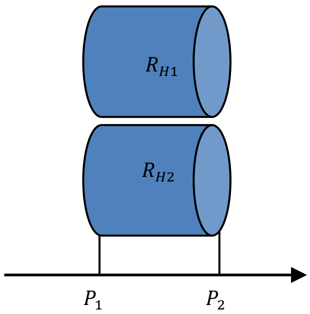
- En séries :



Avec : $P_1 - P_2 = R_{H1} D_v$ et $P_2 - P_3 = R_{H2} D_v$

Donc $P_1 - P_3 = (R_{H1} + R_{H2}) D_v$

- En parallèles



Avec : $P_1 - P_2 = R_{H1} D_{v1} = R_{H2} D_{v2}$

Et $D_v = D_{v1} + D_{v2} = \Delta P \left(\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}}\right)$

D'où $R_{eq} = \frac{R_{H1} R_{H2}}{R_{H1} + R_{H2}}$Les résultats précédents montrent que la résistance hydraulique augmente avec la longueur mais surtout avec les rayons faibles.

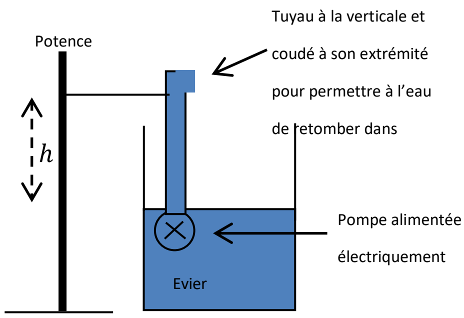
Activité 10 : rendement d'une pompe

On définit le rendement η d'une pompe dans un circuit hydraulique par le rapport suivant :$\eta = \frac{P_{hydraulique}}{P_{electrique}}$

Où :

- $P_{hydraulique}$ est la puissance fournie à l'eau qui circule dans le circuit hydraulique
- $P_{electrique}$ est la puissance électrique fournie à la pompe

Vous allez réaliser le circuit hydraulique suivant :



En prenant en compte les pertes de charges régulières, proposer puis réaliser un protocole permettant d'estimer le rendement η de la pompe que vous avez à disposition.

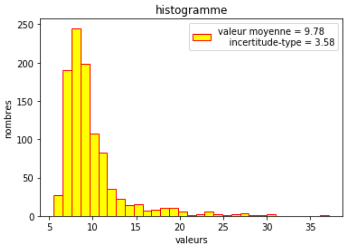
Rq :

On rappelle l'expression du travail massique associé aux pertes de charges régulières : $w_f = -\frac{Lfc^2}{2d}$ où L est la longueur de la canalisation de diamètre d siège d'un écoulement de vitesse moyenne c et avec f le coefficient de perte de charge que l'on détermine avec le diagramme de Moody.

On rappelle également l'expression du nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho c d}{\eta}$ où $\rho = 10^3 kg.m^{-3}$ et $\eta = 10^{-3} Pa.s$ sont respectivement la masse volumique et la viscosité de l'eau.

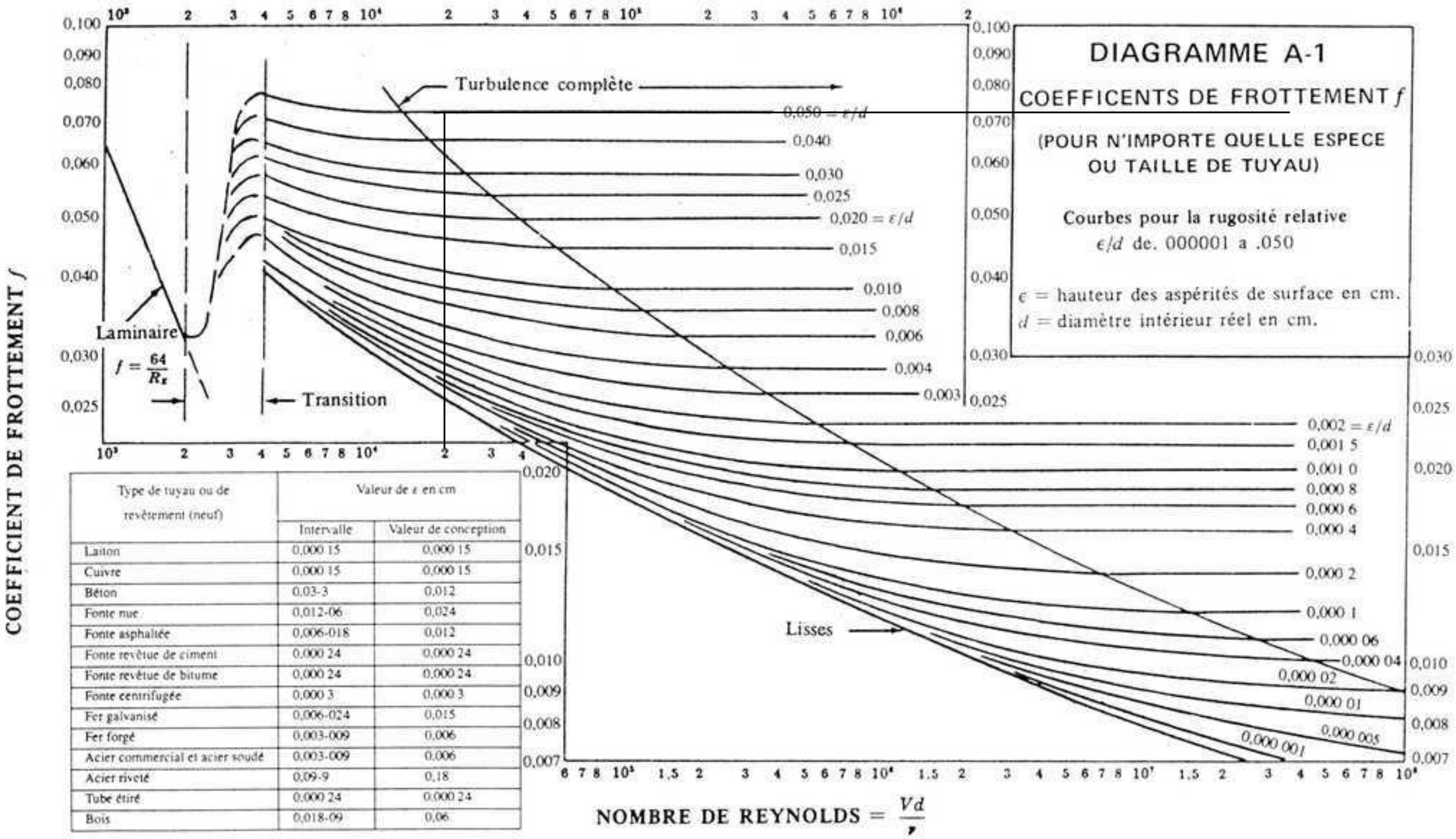
Pour les tuyaux à disposition les aspérités ont pour dimensions typiques : $\varepsilon = 0{,}0025 mm$

Grille de compétences	**/1**	**/2**	**/3**	**/4**
		Analyser		
Ecrire l'équation de Bernoulli généralisée entre deux points judicieusement	$D_m\left(\frac{\Delta_s P}{\rho} + \Delta_s e_c + \Delta_s e_p\right) = P_{hydrau} + D_m w_f$			

choisis	Entre la surface libre de l'évier et la sortie du tuyau : $$D_m\left(\frac{c^2}{2}+gh-w_f\right)=P_{hydrau}$$
Obtenir le coefficient f	On calcule le nombre de Reynolds : $$Re=\frac{\rho c d}{\eta}\approx 6000$$ Et $\frac{\varepsilon}{d}=\frac{0{,}0025}{6.6}\rightarrow lisse$ $$f\approx 0{,}035$$
Réaliser	
Mesurer les différentes puissance	On peut comparer les ordres de grandeurs des différentes puissances : $$P_{elec}\approx 2{,}5W$$ $$P_{cinétique}=13mW$$ $$P_{pesanteur}\approx 189mW$$ $$P_f\approx 41mW$$
Valider	
Calculer le rendement	On a un rendement faible de 10%. 
Communiquer	
Proposer une analyse de son résultat.	On peut expliquer ce faible rendement par deux raisons : -Les frottements solides et fluide au niveau de la pompe (seuls les frottements dans le circuit ont été considérés) -il y a des fuites au niveau de la pompe : toute l'eau qui rentre n'est pas injectée dans le tuyau

Source intéressante :

https://www.youtube.com/watch?v=fn7OoYrv3yM



Type de tuyau ou de revêtement (neuf)	Valeur de ε en cm	
	Intervalle	Valeur de conception
Laiton	0,000 15	0,000 15
Cuivre	0,000 15	0,000 15
Béton	0,03-3	0,012
Fonte nue	0,012-06	0,024
Fonte asphaltée	0,006-018	0,012
Fonte revêtue de ciment	0,000 24	0,000 24
Fonte revêtue de bitume	0,000 24	0,000 24
Fonte centrifugée	0,000 3	0,000 3
Fer galvanisé	0,006-024	0,015
Fer forgé	0,003-009	0,006
Acier commercial et acier soudé	0,003-009	0,006
Acier riveté	0,09-9	0,18
Tube étiré	0,000 24	0,000 24
Bois	0,018-09	0,06