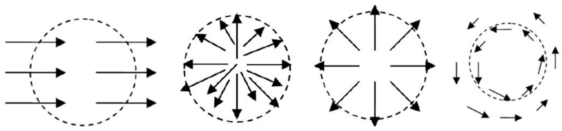
Activité 1 : description du champ des vitesse

Voici 4 écoulements :

Proposer une description « simple » du champ des vitesses dans ces 4 situations. On réfléchira donc à travailler dans un système de repérage adapté et on cherchera à évaluer les éventuelles invariances.

Les lignes de champ des vitesses de ces écoulements sont respectivement les suivantes :



1-En cartésien : $\vec{v} = v_0\overrightarrow{u_x}$

2-En sphérique : $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_r}$

3-En cylindrique : $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_r}$

4-En cylindrique : $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_\theta}$

Activité 2 : Calcul de débits

On considère deux écoulements dans une conduite cylindrique de rayon R d'axe z :

- Écoulement 1 : $v_z = v_0$ avec vitesse v_0 constante
- Ecoulement 2 : $v_z = v_0(1-\frac{r^2}{R^2})$ avec v_0 vitesse en $r = 0$

1) Calculer, pour chaque écoulement, le débit D_v volumique à travers une section droite de la canalisation
2) En déduire la vitesse moyenne $v_{moy} = \frac{D_v}{\pi R^2}$ pour chaque écoulement.

Si le champ des vitesses est uniforme alors le débit est évident (et ne nécessite pas de calculer la surface !!!!) : $D_v = v_0\pi R^2$

Avec le profil Poiseuille, on a :

$$D_v = \iint_S v_0(1-\frac{r^2}{R^2})\, r dr d\theta$$

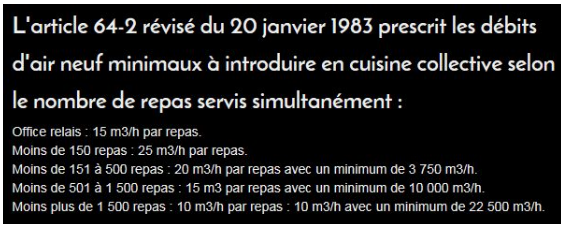
$$D_v = 2\pi v_0\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = \frac{\pi v_0 R^2}{2}$$

Soit une vitesse moyenne donnée par $\frac{v_0}{2}$

Activité 3 : Problème de physique concernant l'écoulement incompressible d'air dans une conduite

On considère de l'air en écoulement stationnaire dans une conduite cylindrique de 50 cm de diamètre, à une pression de 1,5 bar et à une vitesse moyenne de 2 m.s^{-1}. On considère que la masse volumique φ de l'air est uniforme. Cet air, à la température de 300K, peut être assimilé à un gaz parfait.

a) Combien d'installation comme celle-ci permettent de respecter les normes en vigueur dans une cantine scolaire servant 400 repas ?
b) Calculer le débit massique de l'installation complète.


L'article 64-2 révisé du 20 janvier 1983 prescrit les débits d'air neuf minimaux à introduire en cuisine collective selon le nombre de repas servis simultanément :

Office relais : 15 m3/h par repas.
Moins de 150 repas : 25 m3/h par repas.
Moins de 151 à 500 repas : 20 m3/h par repas avec un minimum de 3 750 m3/h.
Moins de 501 à 1 500 repas : 15 m3 par repas avec un minimum de 10 000 m3/h.
Moins plus de 1 500 repas : 10 m3/h par repas : 10 m3/h avec un minimum de 22 500 m3/h.

Soit N le nombre d'installations, on a un débit volumique donné alors par : $D_v = Nv_0S$ et une consigne imposant $D_v = 400 \times \frac{20}{3600}$ on trouve $N = 6$

L'hypothèse incompressible permet de relier facilement le débit massique et volumique par : $D_m = \rho D_v$.

La masse volumique nous ait donnée par la loi des gaz parfait : $\rho = \frac{MP}{RT}$ on peut alors trouver le débit massique de 4kg/s

Activité 4 : Problème de physique

Dans une conduite de rayon R circule, de manière stationnaire, du pétrole avec un débit de 100L.s^{-1}. Le fluide passe ensuite dans une conduite de diamètre r. Calculer le rapport $\frac{R}{r}$ augmentant la vitesse de l'écoulement d'un facteur 4.

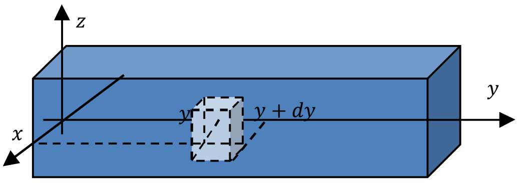
L'hypothèse incompressible (et homogène) est implicite pour ce fluide et sachant que l'écoulement est stationnaire, on a donc conservation du débit volumique :

$$v_1S_1 = v_2S_2 = D_v$$

Donc diviser par deux le rayon revient à multiplier par 4 la vitesse de l'écoulement

Activité 5 : Bilan local de la masse

On considère un écoulement unidirectionnel, dans une canalisation de section rectangulaire. Cet écoulement est caractérisé par son vecteur densité de flux de masse $\vec{j} = j_y(x,y,z,t)\vec{u_y}$ en repérage cartésien. Dans la suite, nous allons étudier un élément de volume mésoscopique $dV = dxdydz$



1) Exprimer, en utilisant le vecteur $\vec{j}$, la masse élémentaire $\delta m_e > 0$ qui rentre dans le volume mésoscopique dV à travers la surface $\vec{dS_e} = dS\vec{u_y}$ de côte y pendant l'intervalle de temps dt.
2) Exprimer, en utilisant $\vec{j}$, la masse élémentaire $\delta m_s < 0$ qui sort du volume mésoscopique dV à travers la surface $\vec{dS_s} = -dS\vec{u_y}$ de côte $y + dy$ pendant l'intervalle de temps dt.
3) Effectuer un bilan local de masse sur l'élément de volume dV dessiné ci-dessus et montrer que : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial y}$.

On souhaite généraliser le résultat précédent pour une écoulement quelconque :

4) Que devient le bilan précédent si $\vec{j} = \begin{pmatrix} j_x(x,y,z,t) \\ j_y(x,y,z,t) \\ j_z(x,y,z,t) \end{pmatrix}$?

On définit l'opérateur divergent d'un champ de vecteur $\vec{a}$ par $div\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$.

5) En déduire que $\frac{\partial \rho}{\partial t} -= -div\vec{j}$ (équation appelée équation locale de conservation de la masse).
6) Adapter l'écriture de la relation précédente dans le cas d'un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible.

On donne le théorème d'Ostrogorski pour un champ de vecteur $\vec{a}$ (volume V délimité par une surface S fermée)

$$\oint\!\!\oint_S \vec{a}.\vec{dS_{ext}} = \iiint_V div\vec{a}dV$$

7) Montrer alors que l'analyse locale qui vient d'être effectuée en régime stationnaire aboutit également à un débit volumique identique pour toute section droite de la canalisation.

$$dm(M,t+dt) - dm(M,t)$$
$$= j_y(x,y,z,t)dS_e dt$$
$$- j_y(x,y+dy,z,t)dS_s dt$$

$$\frac{\partial dm}{\partial t}dt = -\frac{\partial j_y}{\partial y}dVdt$$

Donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j_y}{\partial y}$$

Dans le cas d'un écoulement quelconque :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j_z}{\partial z} - \frac{\partial j_y}{\partial y} - \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

On retrouve l'expression de l'opérateur divergent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\vec{j}$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) d'un fluide incompressible ($div\vec{j} = \rho_0 div\vec{v}$) :

$$div\vec{v} = 0$$

On dit alors que $\vec{v}$ est à flux conservative car :

$$\iiint_V div\vec{v}.dV = 0 \leftrightarrow \oint\!\!\oint \vec{v}.\vec{dS_{ext}} = 0 \leftrightarrow |D_{v,e}| = D_{vs}$$

Activité 6 : Ecoulement source

On appelle source, un tuyau filiforme (de section négligeable), rectiligne (confondu avec l'axe Oz des coordonnées cylindriques), supposé infini et alimenté en eau (de masse volumique ρ_0 uniforme). Ce tuyau percé est alors responsable d'un écoulement radial de la forme $v_r(r,\theta,z,t)$ en repérage cylindrique.

On suppose l'écoulement stationnaire, à symétrie cylindrique.

Montrer, en utilisant toutes les hypothèses, que $v_r(r) = \frac{K}{r}$ où K est une constante.

On donne l'expression de l'opérateur divergent en repérage cylindrique :

$$div\vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Détaillons les conséquences de chaque hypothèse :

- Champ radial : $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r(r,\theta,z,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Stationnaire : $v_r(r,\theta,z)$
- La symétrie cylindrique entraîne alors que $v_r(r)$

- Incompressible et de masse volumique ρ_0 : d'après l'équation de conservation la vitesse est à flux conservatif et $div\vec{v} = 0$ donc $\frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} = 0$ soit $v_r = \frac{K}{r}$.
  On peut retrouver ce résultat en faisant un bilan local de flux $d\phi = v(r+dr)(r+dr)d\theta dz - v(r)rd\theta dz = \frac{\partial rv}{\partial r}drd\theta dz = 0$