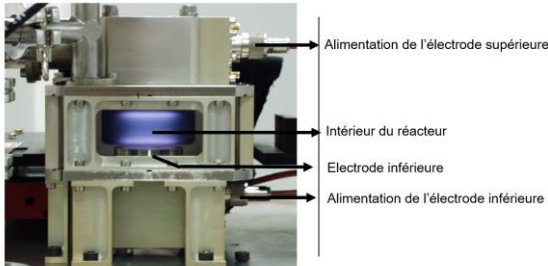


Problème de Laplace

Activité 1 : Problème de Laplace avec Python

Au laboratoire du GREMI d'Orléans, on utilise un réacteur assimilable à deux électrodes planes et parallèles afin de générer des plasmas de laboratoire.



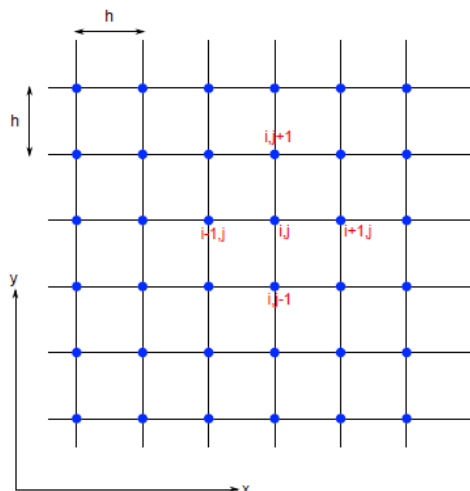
L'électrode inférieure est chargée au potentiel $V_p = 400V$ et l'électrode supérieure au potentiel $-V_p$. Le milieu entre les électrodes est encore assimilable à du vide.

- 1) Montrer que le potentiel électrostatique $V(M)$ entre les électrodes doit vérifier l'équation $\Delta V = 0$ (appelée équation de Laplace)

On ramène ce problème à deux dimensions dans le plan P vertical médiateur du réacteur carré de côté $a = 20cm$ et on suppose $V(x, y)$. Dans ces conditions, l'équation de Laplace devient :

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

On va utiliser un maillage de P , de pas $h = \frac{a}{N-1}$ avec $N \times N$ le nombre de points du maillage (discretisation identique dans les deux directions de l'espace). Un point M est alors repéré par $[x_i = ih, y_j = jh]$ et sera identifié plus simplement par le couple $[i, j]$.



Le potentiel en M est alors noté $V(M) = V[y_j, x_i] = V[j, i]$.

- 2) En utilisant la formule de différence finie centrée pour approximer les dérivées secondes, montrer que :

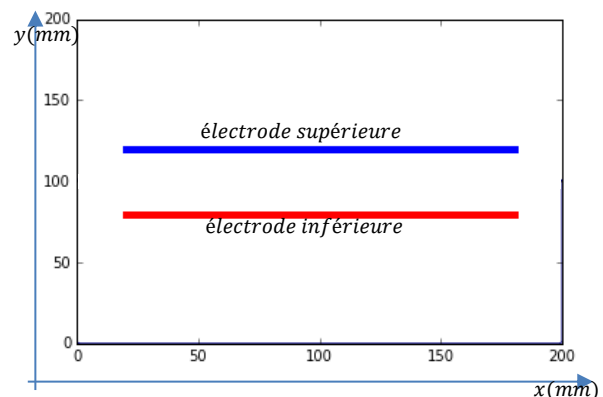
$$V[i, j] = \frac{V[j+1, i] + V[j-1, i] + V[j, i+1] + V[j, i-1]}{4} \quad (\text{Équation 1})$$

La solution (unique) de ce problème doit aussi vérifier les conditions aux limites imposées au potentiel par l'expérimentateur (conditions de Dirichlet). Ces conditions imposées au potentiel sont :

- $\pm V_p$ aux électrodes
- $V = 0$ sur les parois du réacteur

Les lignes de codes ci-dessous initialisent le programme :

```
N=200#nombre de lignes
M=200#nombre de colonnes
Vp=400#potentiel en Volt
V1=np.zeros( (N,M) )
V1[80,20:180]=Vp
V1[120,20:180]=-Vp
plt.plot([20,180], [80,80], 'x-', lw = 5) #
plaque inf
plt.plot([20,180], [120,120], 'b-', lw = 5)
# plaque sup
```



Pour résoudre ce problème, on va utiliser une méthode itérative (méthode de Jacobi). A partir du tableau initial $V1$, on calcule une nouvelle valeur du potentiel pour tous les points à l'aide de l'équation 1 en maintenant les conditions aux limites. Le processus est ensuite répété jusqu'à obtenir des valeurs de potentiels stables. Au bout de k itérations, on a un potentiel $V_k[j, i]$ et le calcul est stoppé à l'aide d'un critère de convergence :

$$\varepsilon = \max(|V_k[j, i] - V_{k-1}[j, i]|) < \varepsilon_c$$

Où ε_c est un seuil de convergence.

On donne ci-dessous, le programme python permettant de réaliser cette méthode itérative et utilisant deux boucles « for ».

```
"""itération sans vectorisation"""
V2=V1.copy() #pour éviter les effets de
bords !!essentiel pour la le comparaison
```

```

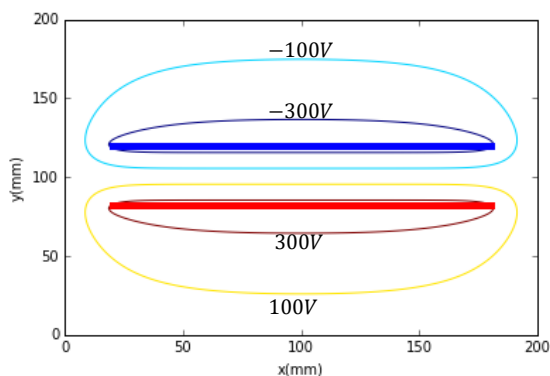
epsilon = 0.01 # seuil de convergence
ecart = 1 # initialisation (affectation)
iteration = 0
t debut = time.time()
while ecart > epsilon:
    iteration = iteration + 1
    for j in range(1, N-1):
        for i in range(1, N-1):
            V2[j, i] = 0.25 * (V1[j-1, i] + V1[j+1, i] + V1[j, i-1] + V1[j, i+1])
            V2[80, 20:180] = Vp # on impose à
chaque itération les conditions aux limites
            V2[120, 20:180] = -Vp
            ecart = np.max(abs(V2[:, :] - V1[:, :]))
            V1 = V2.copy() # permet de comparer V
entre deux itérations

```

Ce programme se termine au bout de 858s (sur mon ordinateur) après 5547 itérations !!!

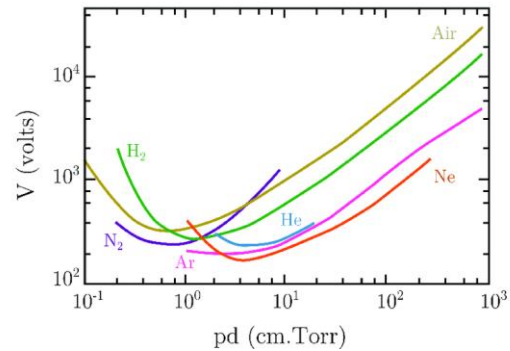
- 3) Python est un langage interprété qui n'est pas mis en valeur avec des programmes utilisant des boucles for pour calculer des tableaux. Réécrire le programme précédent en proposant une version vectorisée (sans les deux boucles for) et permettant alors d'obtenir plus rapidement le tableau numpy V2.

A l'issue de la simulation (en 3s avec vectorisation !!!!), il est possible d'obtenir le tracé de quelques équipotentielles dans le réacteur. Le pas qui a été choisi pour la simulation est $h \approx 1\text{mm}$:



- 4) Peut-on négliger les effets de bords dans la région inter-électrode (assimilable à du vide) et supposer le champ uniforme ? Justifier.

On donne ci-dessous le graphe représentant la loi de Paschen donnant la tension V à appliquer entre deux électrodes distantes de $d(\text{cm})$ en fonction du produit pd où p est la pression du gaz en Torr ($1\text{Torr} = 133\text{Pa}$)

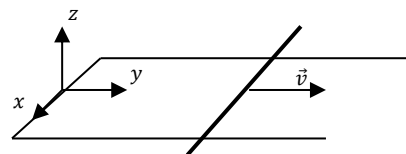


- 5) A partir de quelle valeur de pression en Pa n'est-il plus possible d'ioniser un gaz d'argon ?

Induction de Lorentz

Activité 2 : Couplage parfait

On considère une barre conductrice de masse m posée sur deux rails parallèles distants de a , astreinte à se translater horizontalement suivant Oy et sans frottement mécanique ; le tout est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme et indépendant du temps ; le circuit est initialement équivalent à une résistance R considérée comme constante, à $t = 0$ on lance la barre avec une vitesse v_0 . A un instant t la vitesse de la barre est de norme v . On néglige l'inductance propre du circuit.

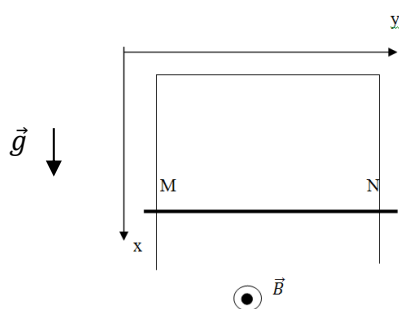


- Exprimer la tension induite apparaissant dans le circuit.
- Ecrire l'équation électrique du circuit à l'aide de la loi des mailles.
- Ecrire l'équation mécanique vérifiée par le centre de masse de la barre conductrice en utilisant la relation fondamentale de la dynamique.
- Montrer que $v(t)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1.
- Exprimer la puissance P_l de la force de Laplace et la puissance P_e associée à la tension induite. Comment sont reliées ces deux quantités ? Interpréter.
- On place un pendule métallique dans une zone où règne un champ magnétique. On observe alors un arrêt des oscillations plus rapide dans le cas où le pendule n'est pas strié. Proposer une explication.



Activité 3 : Induction de Lorentz et freinage par induction

Le circuit ci-dessous est plongé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et stationnaire. MN est le tronçon mobile, de longueur l , participant à la conduction en fermant constamment le circuit. Cette tige mobile est de masse m et initialement immobile. On néglige l'inductance propre du circuit. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

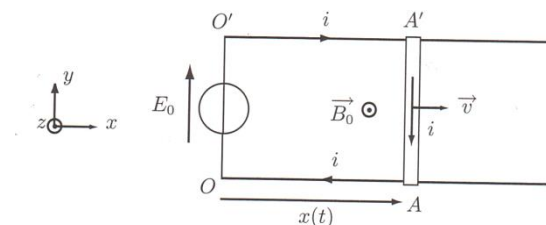


- 1) Décrire qualitativement le mouvement de chute.
- 2)
- a) Ecrire l'équation différentielle mécanique de la tige liant sa vitesse v à l'intensité du courant i traversant le circuit.

- b) Ecrire l'équation électrique liant la vitesse $v(t)$, le courant d'intensité $i(t)$ et la résistance équivalente R du circuit.
- c) En déduire une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $v(t)$.
- 3) En déduire la loi horaire définissant $v(t)$ en fonction de $\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$ et g .
- 4)
 - a) Exprimer la puissance électrique P_e associée à la tension induite.
 - b) Exprimer la puissance mécanique P_l associée à la force de Laplace.
 - c) Montrer que $P_l + P_e = 0$
 - d) En déduire un bilan de puissance complet du dispositif reliant puissance cinétique, Joule et la puissance du poids de la tige.

Activité 4 : Induction de Lorentz et Rail de Laplace en fonctionnement moteur

On considère un rail AA' mobile, de masse m , de longueur l fermant un circuit électrique alimenté par un générateur de tension continue E . La résistance équivalente du circuit sera notée R . AA' repose sur le circuit horizontal, n'est soumis à aucun frottement et reste dans le plan horizontal. Le champ magnétique appliqué est uniforme et stationnaire. On néglige l'inductance propre du circuit.



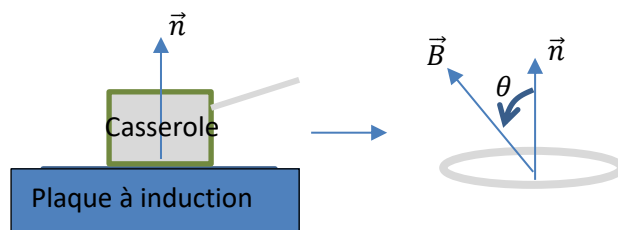
Vue du dessus

- 1) Expliquer qualitativement la mise en mouvement de la tige AA' (initialement immobile).
- 2)
 - a) Ecrire l'équation différentielle mécanique de la tige liant sa vitesse v à l'intensité i du courant traversant le circuit.
 - b) Ecrire l'équation électrique liant la vitesse $v(t)$, le courant d'intensité $i(t)$ et la résistance équivalente R du circuit.
 - c) En déduire une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $v(t)$.
 - 3) En déduire la loi horaire définissant $v(t)$ en fonction de $\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$, E , B_0 et l
 - 4) Faire un bilan de puissance. Comment est utilisée puissance électrique délivrée par le générateur de tension ?

Induction de Neumann

Activité 5 : Induction de Neumann et chauffage par induction

A l'aide d'un modèle simple, nous allons expliquer le principe du chauffage inductif. La casserole métallique sera assimilée à une spire fermée de résistance R (on néglige son inductance propre). On note \vec{n} le vecteur unitaire normale à la spire et dont le sens est donné ci-dessous. La plaque « à induction » génère un champ magnétique \vec{B} uniforme et tournant à la vitesse angulaire ω_0 constante $\theta(t) = \omega_0 t$.

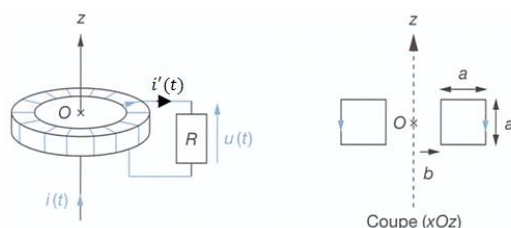


- 1) Donner l'expression du flux ϕ du champ magnétique \vec{B} à travers la surface S de la spire.
- 2) En déduire l'expression de la tension induite e s'établissant dans la spire.
- 3) Donner l'expression de l'intensité du courant induit i s'établissant dans la spire.
- 4) En déduire l'expression de la puissance moyenne P_{moy} dissipée par effet Joule. Cette puissance ne peut être générée spontanément, d'où vient-elle ?

Induction mutuelle et auto-induction

Activité 6 : Inductance propre et mutuelle (1806-1760579)Activité 7 : La pince ampérométrique

On considère un tore de section carré de côté a . On enroule sur ce tore, N spires jointives, elles se caractérisent en régime stationnaire par une résistance électrique totale R . Soit $i'(t)$ l'intensité du courant traversant ces spires. On place, sur l'axe du tore, un fil infini traversé par un courant d'intensité $i(t)$.



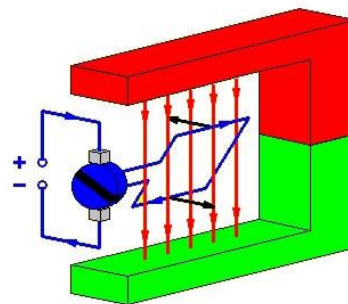
- 1) Donner l'expression du flux ϕ_{f-t} du champ magnétique créé par le fil à travers le tore. En déduire l'expression du coefficient d'inductance mutuelle M en fonction des constantes du problème.
- 2) Donner l'expression du flux propre ϕ_t du tore. En déduire l'expression du coefficient d'inductance propre L du tore en fonction des constantes du problème.
- 3) Proposer une équation différentielle reliant les courants $i(t)$ et $i'(t)$.
- 4) Mettre l'expression de la fonction de transfert $\frac{i'}{i}$ sous la forme $\frac{i'}{i} = K \frac{j\omega}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$. On donnera les expressions de K et ω_0 .
- 5) Quel est le comportement en fréquence de la pince ?
- 6) Soit I_0 l'amplitude maximale du courant supposé sinusoïdal passant dans le fil. Donner l'expression du courant maximal I_0' passant dans le tore.

Applications

Activité 8 : Moteur CCa) Principe d'un moteur à courant continu

Dans une première approche, nous allons considérer le moteur à courant continu comme étant constitué :

- D'un aimant permanent, jouant le rôle de stator, rayonnant un champ magnétique \vec{B} supposé uniforme et stationnaire (norme notée B).
- D'une spire de centre O , jouant le rôle de rotor, conductrice, rectangulaire, de surface S et alimentée par une tension continue. On associe à cette spire un moment dipolaire \vec{m}

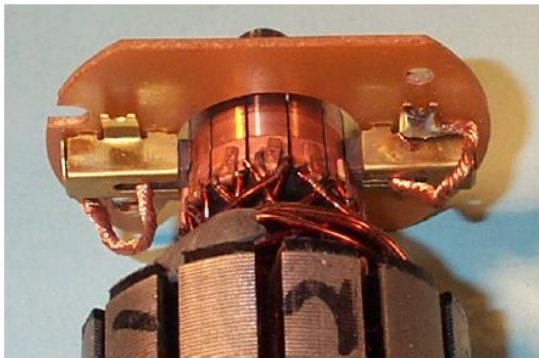
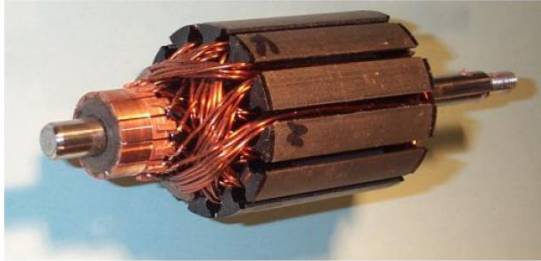


Le générateur est connecté à la spire par l'intermédiaire de deux balais et d'un collecteur.

Donner le principe de fonctionnement de ce moteur.

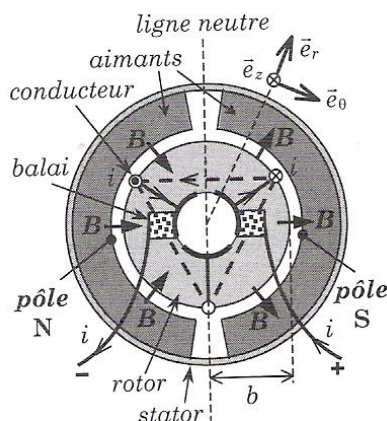
b) Modèle d'ordre 2 d'un petit moteur CC de TP

Pour assurer une meilleure rotation, les moteurs à courant continu sont constitués d'un collecteur à plusieurs lames :



On donne ci-dessous la description d'un petit moteur CC.

Le champ magnétique du stator est produit par deux aimants en forme de coque cylindrique collés à l'intérieur du carter cylindrique du moteur. Le rotor ferromagnétique comporte trois bobinages identiques en cuivre répartis à 120° autour de l'axe de rotation et connectés à un collecteur à trois lames de cuivre. Le courant électrique est amené aux bobinages par l'intermédiaire de deux balais conducteurs frottant sur le collecteur. On va assimiler le rotor à un ensemble de N conducteurs répartis sur un cylindre de rayon b et de longueur h . Lorsqu'un conducteur traverse la ligne neutre, le courant i qui le parcourt s'inverse par changement de balai.



- 1) Quelle relation y a-t-il entre N et N_a , nombre de conducteurs actifs (c'est-à-dire traversés par un courant) dans ce moteur ?
- 2) Soit $B_r(\vartheta)$ la composante radiale constante du champ magnétique, négative sous le pôle nord et positive sous le pôle sud. Quelle est l'expression vectorielle de la force \vec{F} qu'exerce le champ magnétique sur un conducteur ? Préciser son orientation selon la position du conducteur par rapport à la ligne neutre (faire un schéma) dans le repère cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_z)$.
- 3) Déterminer le moment $\vec{\Gamma}_{em}$ total qui s'exerce en moyenne sur les conducteurs et montrer que sa projection suivant \vec{e}_z est donnée par $\Gamma_{em} = Ki$. On donnera l'expression de K en fonction de b, h, N_a et B_r .
- 4) On note J le moment d'inertie suivant l'axe Oz . Appliquer le théorème du moment cinétique afin d'obtenir une équation (1) liant $\omega(t)$ avec le courant d'intensité $i(t)$.
- 5) Rappeler le bilan de puissance intervenant dans le cas d'induction de Lorentz traduisant le couplage électromécanique parfait et en déduire l'expression de la force électromotrice totale e .
- 6) Soient R et L la résistance et l'inductance propre du rotor. Représenter le schéma électrique équivalent du rotor alimenté sous la tension u . En déduire l'équation différentielle électrique (2) reliant u, i et ω .
- 7) Donner alors l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse angulaire. Préciser l'ordre du système. Donner l'expression de la pulsation propre et du coefficient d'amortissement en fonction de K, L, R et J .

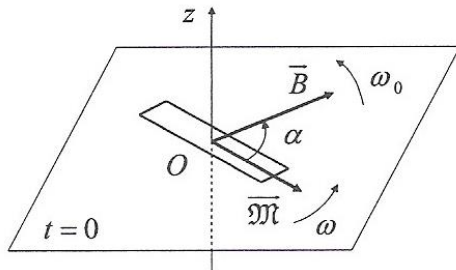
Activité 9 : Moteur synchrone et asynchrone en régime permanent

Les moteurs synchrones et asynchrones se différencient essentiellement sur la nature du rotor. En effet, ils utilisent tous les deux un champ tournant provoqué par un stator mais dans le cas d'un moteur synchrone le rotor est un aimant et pour un moteur asynchrone le rotor est une bobine. Cette différence entraîne alors deux principes de fonctionnement différents que l'on va étudier dans le cas du régime permanent. Nous admettons alors que, dans le cadre de ce régime permanent, le moment utile Γ_u (pour la mise en rotation d'une pièce par exemple) est égal au moment magnétique moyen $\langle \Gamma_m \rangle$ que ressent le rotor :

$$\langle \Gamma_m \rangle = \Gamma_u$$

- Moteur synchrone

Un montage convenable de bobines parcourues par des courants alternatifs de pulsation ω_0 produit dans un certain volume un champ magnétique \vec{B} , d'amplitude B_0 , qui tourne dans le plan xOy avec une pulsation ω_0 constante.



D'autre part, le rotor (pièce mobile) constituée d'un petit aimant permanent portant un moment magnétique permanent \vec{m} , orthogonal à Oz , tourne dans le plan xOy avec un mouvement de rotation uniforme de pulsation ω . La valeur de l'angle (\vec{m}, \vec{B}) initial est noté α comme indiqué sur la figure.

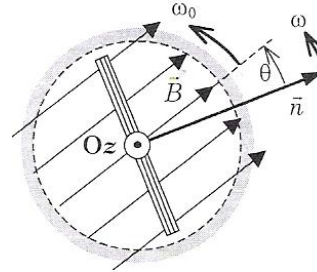
- 1) Exprimer la valeur instantanée du moment magnétique $\vec{\Gamma}_m$ exercée par le champ sur le rotor.
- 2) En déduire alors la valeur moyenne de $\vec{\Gamma}_m$ dans le cas où $\omega = \omega_0$ et $\omega \neq \omega_0$. Justifier le nom de moteur synchrone.
- 3) Pour quelles valeurs de α , le système fonctionne-t-il en moteur (c'est-à-dire pour $\langle \vec{\Gamma}_m \rangle \cdot \vec{u}_z > 0$: le rotor tourne dans le même sens que le champ magnétique) ?
- 4) Un régime de fonctionnement du moteur est dit stable si, lorsque le moteur prend accidentellement de l'avance (ou du retard) sur son régime permanent, le jeu de forces qu'il subit lui fait perdre cette avance (ou ce retard) ; il est instable dans le cas contraire. A partir du graphe $\langle \Gamma_m(\alpha) \rangle$, déterminer les valeurs de α correspondant à un régime stable lorsque le moteur fournit un couple utile Γ_u .

Ce type de moteur présente l'avantage d'avoir une vitesse de rotation précise et bien déterminée, en revanche il nécessite un système de démarrage (de type asynchrone, cf après) et possède l'inconvénient de décrocher en présence d'un couple de frottement important.

- Moteur asynchrone

Dans un domaine d'espace autour de O , le champ magnétique \vec{B} produit est un champ tournant dans le plan xOy à la vitesse angulaire ω_0 et de norme B_0 : c'est l'inducteur. Le rotor ou induit est une petite bobine plate,

fermée sur elle-même, de résistance R , d'inductance propre L et est constituée de N spires planes circulaires. Chacune spire est de surface S , d'axe dirigé vers le vecteur unitaire \vec{n} (contenu également dans le plan xOy). Cette bobine tourne à la vitesse ω autour de l'axe Oz .



A l'instant origine, $\vec{B}(0)$ est portée par l'axe Ox et l'angle $(\vec{n}(0), \vec{B}(0)) = \theta$

- 1) Décrire le principe de fonctionnement de ce moteur. Expliquer le nom de moteur asynchrone.
- 2) Déterminer le flux $\phi(t)$ du champ magnétique à travers la bobine plate. On posera $\phi_0 = NB_0S$
- 3) Montrer alors que la situation est analogue à un circuit excité à la pulsation $\Omega = (\omega_0 - \omega)$. Dessiner le modèle électrique équivalent.
- 4) L'expression du courant $i(t)$ qui parcourt la bobine est alors de la forme : $i(t) = I_0 \cos((\omega_0 - \omega)t + \psi)$. En utilisant la notation complexe donner l'expression de $I_0 \sin \psi$.
- 5) Après avoir assimilé la bobine à un dipôle magnétique de moment \vec{m} , exprimer le moment $\vec{\Gamma}_m$ en fonction, entre autres, de $\Omega = (\omega_0 - \omega)$. En déduire sa valeur moyenne $\langle \vec{\Gamma}_m \rangle$.
- 6) Tracer l'allure de la courbe représentative $\langle \Gamma_m(t) \rangle$ en fonction de la vitesse ω .

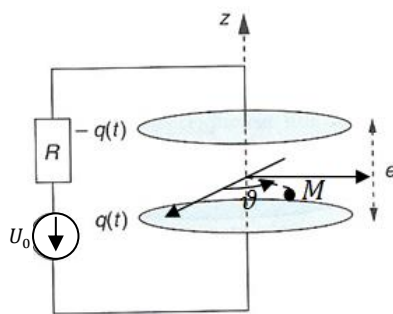
On suppose toujours le moteur en régime permanent. La charge impose un moment utile Γ_u inférieur au moment moteur maximal que peut développer le moteur.

- 7) Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphe précédent :
 - a) Le moteur peut-il a priori démarrer ?
 - b) Pour quelles fréquences le système est-il effectivement moteur ?
 - c) Le fonctionnement est dit stable si, lors d'une diminution éventuelle de sa vitesse de rotation, la somme des moments qu'il subit tend à s'opposer à cette diminution. A quelle plage de pulsations correspond la zone de stabilité ?

Bilans énergétiques

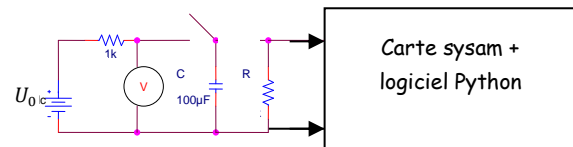
Activité 10 : Bilan énergétique de la charge d'un condensateur

On considère la charge d'un condensateur initialement déchargé sous une tension U_0 constante délivrée par un générateur. Le condensateur est constitué de deux plans circulaires de rayon a , distants de e et séparés par du vide. On négligera tout effet de bord de telle sorte que le champ électrique et magnétique seront donnés par $\vec{E} = E(t)\vec{u}_z$ et $\vec{B} = B(r,t)\vec{u}_\theta$ dans le condensateur (en repérage cylindrique) et le champ électrique sera considéré comme nul à l'extérieur. On note $q(t)$ et $-q(t)$ les charges portées par les armatures.



- 1) A l'aide du théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ présent entre les armatures du condensateur.
- 2) Avec l'équation de Maxwell-Ampère écrite dans le condensateur, montrer qu'il existe effectivement un champ magnétique orthoradial ?
- 3) En proposant un contour judicieusement choisi, donner l'expression du champ magnétique dans le condensateur en fonction de $\frac{dq(t)}{dt}$, la distance radiale r et de constantes.
- 4) En déduire alors l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$ et de la puissance électromagnétique P échangée par le composant avec l'extérieur au cours de sa charge.
- 5) Exprimer alors l'énergie électromagnétique accumulée au cours de la charge à l'aide des réponses précédentes.

On souhaite vérifier les résultats précédents par une mesure expérimentale à l'aide du circuit ci-dessous. La manipulation consiste à charger un condensateur sous une tension $U_0 = 5V$ et à le décharger dans une résistance $R = 1k\Omega$. L'énergie U_{em} stockée par le condensateur est alors dissipée par effet joule $U_{em} = \int_0^\infty \frac{u_R^2}{R} dt$



L'acquisition est effectuée à l'aide de la carte *System SP5™* et du logiciel *Python*.

On utilise pour cela le module `enonce_exo10.py` contenant la fonction `acquisition_1voie.py`.

La fonction `acquisition_1voie` renvoie `liste_u` la liste des tensions acquises et `liste_t` la liste des temps pendant lesquels le signal est acquis. Cette fonction possède pour arguments (dans l'ordre) :

- Le numéro de la voie (par exemple 0 pour EA0)
- Le calibre de tension (ordre de grandeur de la tension maximale mesurée)
- La fréquence d'échantillonnage en Hz
- La durée d'acquisition en seconde
- Le sens de déclenchement (1 pour un passage à l'état haut, 0 pour état bas)
- Le niveau de déclenchement en volt
- Le « prétrig » le nombre de points à conserver en mémoire avant le seuil de déclenchement.

6)

- a) En tenant compte des valeurs des composants, proposer des valeurs pertinentes pour les différents arguments de la fonction.

```
liste_u, liste_t = acquisition_1voie(0, 7.5, 100000, 1, 0, 4.9, 100)
```

- b) Pour effectuer le calcul d'intégration, écrire une fonction `integration` utilisant la méthode des rectangles ou des trapèzes. Cette fonction retournera la valeur de C .