

Description d'une distribution de courant

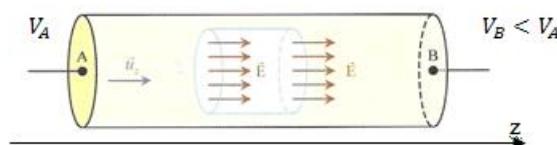
Activité 1 : Description d'une distribution de courant

- 1) Soit un fil conducteur de géométrie cylindrique, de section droite S constante, de rayon R , parcouru par un courant d'électrons d'intensité I constante, positive (avec le fléchage utilisé) et réparti uniformément sur S . Le mouvement des charges est dans la direction de l'axe du cylindre.
 - i) Exprimer la norme du vecteur densité de courant volumique en fonction de I et R .
 - ii) Estimer la norme du vecteur densité de courant volumique dans le cas d'un fil de T.P. traversé par un courant de 1A et de section $S = 1\text{mm}^2$.
 - iii) Le conducteur utilisé est en cuivre. Le cuivre ($[\text{Ar}]3d^{10},4s^1$) présente une conductivité non nulle en proposant l'électron de son orbitale $4s$ à la conduction (électron libre). Soit ρ la masse volumique du cuivre et M_{Cu} sa masse molaire. Donner l'expression de la concentration en électrons, notée n_m , participant à la conduction.
 - iv) On donne $\rho \approx 10 \cdot 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $M_{\text{Cu}} \approx 60 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et le nombre d'Avogadro $N_a \approx 6 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$, calculer n_m .
 - v) Des questions précédentes, donner un ordre de grandeur de la vitesse de dérive des charges dans un fil conducteur de TP.
- 2) Soit un fil conducteur de géométrie cylindrique, de section droite S constante, de rayon R , parcouru par un courant d'intensité $I > 0$ constante réparti non uniformément sur S . Le vecteur densité volumique de courant est axial et suit la loi $j(r) = j_0 \frac{r}{R}$ où $j_0 > 0$ est une constante. Exprimer I en fonction de j_0 et R .

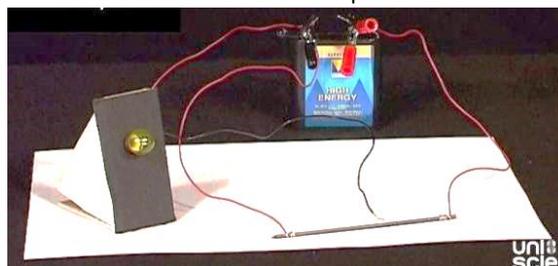
Activité 2 : Loi d'Ohm

On considère un conducteur électrique, cylindrique, d'axe Oz et dont les charges mobiles sont des électrons. Leur vitesse initiale est nulle ; à partir de l'instant $t = 0$, ils sont soumis à un champ électrostatique uniforme et stationnaire $\vec{E} = E\vec{u}_z$. D'autre part, ils sont soumis dans le conducteur à une force de frottement $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$, m étant la masse de l'électron, τ une constante physique et \vec{v} est la vitesse commune aux électrons par rapport au conducteur. On donne $m \approx 10^{-30} \text{kg}$, $e \approx 10^{-19} \text{C}$, $E \approx 0,1 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\tau \approx 10^{-14}$ unité SI.

- 1) Quelle est l'origine physique de la force de frottement ?
- 2) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v d'un électron.
- 3) Donner alors la dimension de τ et proposer une interprétation de cette grandeur.
- 4) Donner également l'expression puis la valeur de la vitesse limite $v_l = v(t \rightarrow \infty)$ de l'électron
- 5) Lorsque le régime permanent est établi, montrer que le vecteur densité de courant \vec{j} peut se mettre sous la forme $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ où γ est la conductivité du matériau que l'on cherchera à exprimer en fonction de m, e, τ et n_m (concentration en électrons participant à la conduction). Faire l'application numérique pour le cuivre $n_m \approx 10^{29} \text{m}^{-3}$.
- 6) $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ est appelée loi d'Ohm locale, chercher à obtenir la loi d'Ohm « couramment » écrite en électrocinétique pour le conducteur cylindrique de section S , de longueur $l = AB$, parcourue par un courant uniformément réparti dessiné ci-dessous et sous une ddp $U = V_A - V_B$. En déduire alors l'expression de sa résistance R_{AB} en fonction de γ, l et S .



- 7) Proposer un schéma électrique à la situation ci-dessous et expliquer la modification possible de l'intensité lumineuse de la lampe.



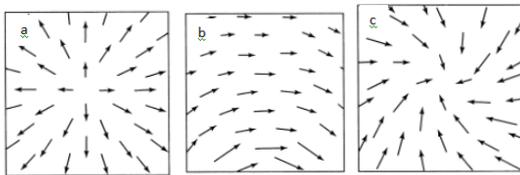
- 8) A partir de la loi d'Ohm locale, déterminer la puissance volumique P_{vol} échangée par le champ électrique avec le conducteur en fonction de γ et \vec{E} . Commenter le signe de cette grandeur énergétique.

Activité 3 : Champ magnétostatique uniforme

Etablir que, si les lignes de champ magnétostatique sont des droites parallèles dans une région vide de courant, alors \vec{B} est uniforme.

Activité 4 : Champ magnétostatique ou pas ?

Quelles sont, parmi les configurations suivantes, celles qui peuvent représenter un champ magnétostatique ? Où pourraient être les courants correspondants ? Le champ est supposé invariant par translation dans la direction perpendiculaire à la page.



Activité 5 : Donne-moi ton champ, je te dirai qui tu es.

Pour une certaine distribution de courants d'axe (Oz), en repérage cylindrique (r, θ, z) , le champ magnétostatique créé en M est $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$, avec B_θ et r_0 constantes :

$$B_\theta(r) = B_0 \left(\frac{r}{r_0} \right) \text{ pour } r < r_0$$

$$B_\theta(r) = B_0 \left(\frac{r_0}{r} \right) \text{ pour } r > r_0$$

On donne l'opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques pour un champ de vecteur \vec{a} :

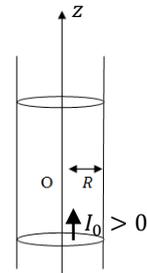
$$\text{rot} \vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

- 1) Enoncer l'équation de Maxwell-Ampère.
- 2) Analyser la direction et la (ou les) variable(s) dont dépend vecteur densité de courant \vec{j} .
- 3) Donner l'expression du vecteur densité de courant \vec{j} en tout point de l'espace en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère. Identifier la distribution de charge.
- 4) Donner la valeur de l'intensité du courant I traversant l'ensemble de ce support conducteur.

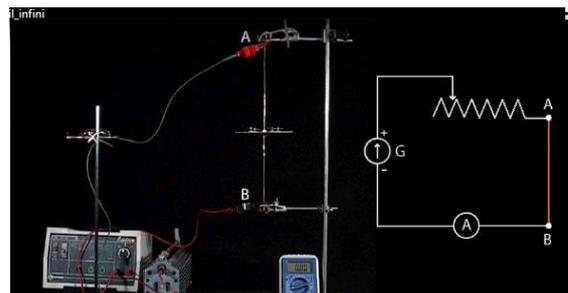
Activité 6 : Entraînement au calcul du champ magnétostatique avec le théorème d'Ampère

a) Champ magnétostatique créé par un fil de rayon R

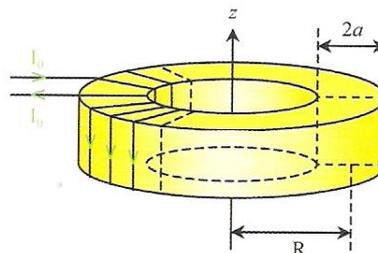
On considère un fil infini de rayon R , d'axe Oz , parcouru par un courant d'intensité constante I_0 uniforme sur toute la section du fil et compté positivement par le sens de fléchage choisi. Ce courant a pour origine un déplacement d'électrons dans la même direction que l'axe Oz .



- 1) Exprimer le vecteur densité de courant volumique \vec{j} en fonction de R et I_0
- 2) Faire l'analyse des symétries et invariances de cette distribution de courant en repérage cylindrique (r, θ, z) et montrer que le champ magnétostatique est orthoradial et ne dépend que de r .
- 3) Expliquer l'expérience photographiée ci-dessous :



- 4) En déduire que la circulation du champ magnétostatique $\oint_r \vec{B} d\vec{OM}$ est facilement exprimée à l'aide d'un contour (d'Ampère) Γ circulaire et orienté, de rayon r , centré autour de l'axe Oz .
- 5) Chercher à exprimer, en fonction de r, R et I_0 , le courant, noté $I_{\text{enlacé}}$, enlacé par Γ si $r \geq R$ et si $r \leq R$.
- 6) En utilisant le théorème d'Ampère, donner l'expression du champ magnétostatique dans le fil et à l'extérieur du fil.
- 7) Compléter le programme PYTHON ci-dessous afin d'obtenir le tracé de quelques vecteurs champ magnétique créé par le fil étudié précédemment dans un plan de cote z donné.



```
#définition des constantes
mu0=4*np.pi*10**-7
I0=1
R=10
#definition des points de mesure
x = np.linspace(-20,20,10)
y = np.linspace(-20,20,10)

X, Y = np.meshgrid(x,y) #génère le maillage
de points associés à chaque mesure

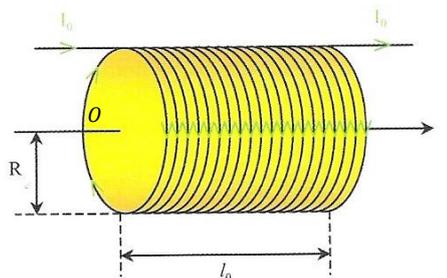
# définition du champ fil infini (champ
ortho dans la base cartésienne)
Bx=np.zeros((len(y),len(x)))
By=np.zeros((len(y),len(x)))

for i in range(len(y)):
    for j in range(len(x)):
        print(x[j],y[i])
        r=(x[j]**2+y[i]**2)**0.5
        if r<R:
            .....
            .....
        else :
            .....
            .....

# tracé du champ magnétique
plt.quiver(X,Y,Bx,By)
plt.show()
```

- 1) Déterminer la norme du champ magnétostatique en un point quelconque de l'espace en appliquant le théorème d'Ampère.
 - 2) Exprimer le flux ϕ_1 du champ magnétostatique à travers une spire du circuit, puis à travers le bobinage complet (noté alors ϕ_N)
 - 3) On définit l'inductance L d'une bobine par la relation $\phi_N = LI_0$. Exprimer L .
- c) Champ magnétostatique créé par un solénoïde supposé infini

Un solénoïde est un cylindre de longueur l_0 et de rayon R recouvert de N spires jointives dans lesquelles circule un courant d'intensité I_0 . Son axe principal est noté Oz , le point O étant placé à l'une des extrémités du cylindre.



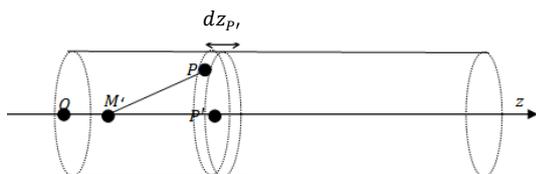
- 1) Déterminer la direction du champ magnétostatique en un point M de cote z_M sur l'axe.
- 2) On suppose les spires suffisamment nombreuses pour pouvoir considérer qu'une nappe de courant uniforme circule sur le cylindre. Exprimer l'intensité élémentaire dI qui circule dans une bande cylindrique de largeur dz_p et de cote z_p .
- 3) On donne l'expression du champ rayonné par une spire sur son axe et parcourue par un courant I : $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$ (avec α , l'angle sous lequel est vue la spire depuis le point de l'axe considéré). Montrer que l'expression du champ magnétostatique élémentaire rayonné par la spire élémentaire de longueur dz_p , en M est :

$$d\vec{B}_z = -\frac{\mu_0 N}{2} I_0 \sin \alpha da \vec{e}_z$$

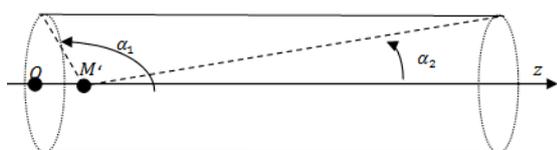
b) Champ magnétostatique créé par une bobine torique

Une bobine torique est obtenue en enroulant un fil autour d'un tore de révolution de section carrée. A noter que ces bobines toriques sont très largement utilisées dans les cartes électroniques pour leurs propriétés magnétiques (surtout au niveau des alimentations)

La bobine comporte N spires assimilables à des boucles carrées de courant de côté $2a$ (circuits filiformes) parcourues par un courant d'intensité $I_0 > 0$.

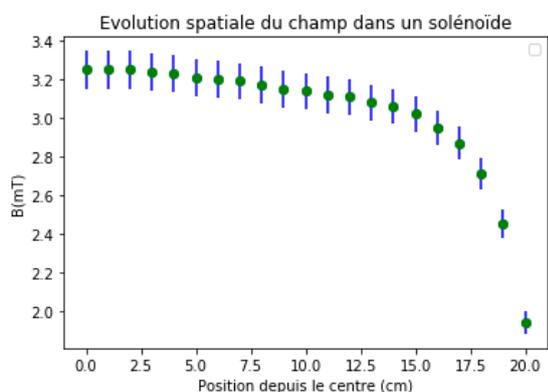


- 4) Exprimer le champ magnétostatique total au point M en fonction des angles α_1 et α_2 qui délimitent le solénoïde.

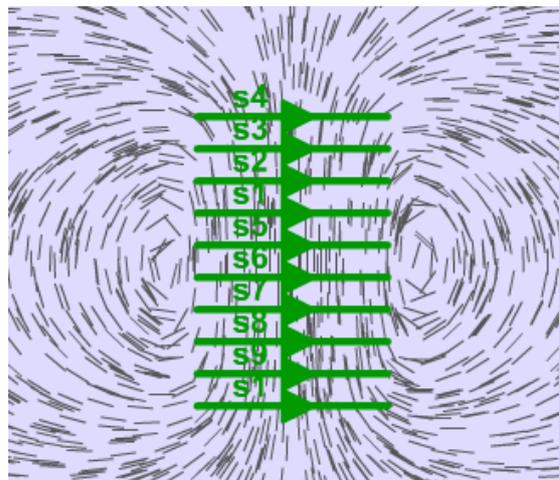


- 5) La longueur du solénoïde est supposée infinie et le nombre de spires par mètre inchangé. Que devient le champ magnétostatique, noté B_∞ sur l'axe ?
- 6) Montrer, à l'aide du théorème d'Ampère, que le champ est uniforme dans le solénoïde infini puis hors de celui-ci. Que vaut le champ à l'extérieur ?
- 7) A l'aide des équations de Maxwell de la magnétostatique, retrouver l'expression du champ magnétique dans un solénoïde infini en postulant la nullité du champ en dehors de la structure.
- 8) Dans cette question, on souhaite apprécier l'écart entre le modèle du solénoïde infini et le solénoïde réel. Quel doit être le rapport $\frac{l_0}{R}$ pour que l'écart relatif (entre le solénoïde réel et solénoïde infini) soit de 1% au centre du solénoïde.

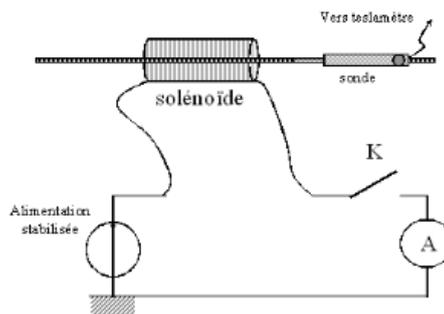
Le graphe ci-dessous représente l'évolution de l'intensité du champ magnétostatique sur l'axe d'un solénoïde (avec $I = 5A, l_0 = 40cm, R = 2,5cm$) depuis son centre vers l'une de ses extrémités.



On donne également ci-dessous une cartographie des lignes de champ magnétique dans le même bobinage.



- 9) Repérer en quoi les 2 documents ci-dessus sont tout à fait complémentaires.
- 10) Réaliser le montage ci-dessous puis estimer le nombre de spire par mètre du solénoïde mis à disposition.

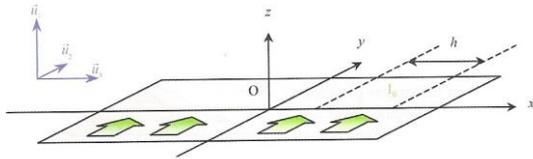


d) Champ magnétostatique créé par un plan infini

On peut rencontrer des distributions de courant localisées sur des faibles épaisseurs. On les étudie en leur prêtant un vecteur densité courant surfacique. C'est par exemple le cas :

- Des conducteurs qui vont, sous l'influence d'un champ électrique variable dans le temps, présenter une réponse inductive qui va imposer des courants en surface.
- D'un matériau supraconducteur qui crée aussi, à basses températures, un courant surfacique en réponse à une excitation provoquée par un champ magnétostatique extérieur.

On se propose dans cet exercice de calculer le champ créé par une telle nappe de courant.



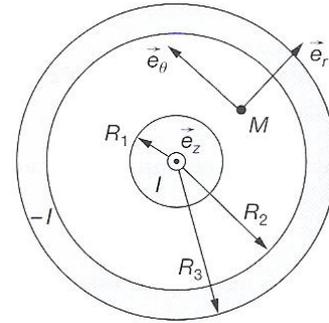
Un plan conducteur infini Oxy est parcouru par un courant surfacique dirigé selon le vecteur unitaire \vec{u}_y . Et dont l'intensité se répartit uniformément le long de l'axe Ox . On trouve ainsi un courant d'intensité $I_0 > 0$ sur un segment de longueur h selon Ox .

- 1) Définir le vecteur densité de courant surfacique en fonction des données du problème.
- 2) Déterminer l'intensité B champ magnétostatique en un point quelconque de l'espace à l'aide du théorème d'Ampère. Tracer la fonction $B(z)$ et apprécier la discontinuité du champ magnétostatique pour cette distribution idéalisée.
- 3) Un second plan parallèle au premier se trouve à la cote d selon Oz . Il est parcouru par un courant de même intensité mais circulant dans l'autre sens. Exprimer le champ magnétostatique engendré par la distribution.

Activité 7 : Câble coaxial

On rappelle que les câbles coaxiaux sont très largement utilisés dans le domaine audio ou vidéo pour transmettre l'information entre deux points distants d'une dizaine de mètres. On se propose d'étudier dans ce problème le champ magnétostatique créé par un câble coaxial. Cette analyse est en fait le départ du raisonnement permettant de connaître l'inductance linéique (et donc l'impédance associée au câble coaxial).

On considère un câble coaxial cylindrique de longueur supposé infini, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1 parcouru par un courant axial, uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2 , de rayon extérieur R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$) et parcouru par un courant uniforme également d'intensité I mais circulant en sens inverse par rapport au courant du conducteur central. On notera \vec{e}_z le vecteur directeur unitaire de l'axe commun des deux conducteurs. Soit M un point situé à une distance r de l'axe du câble.

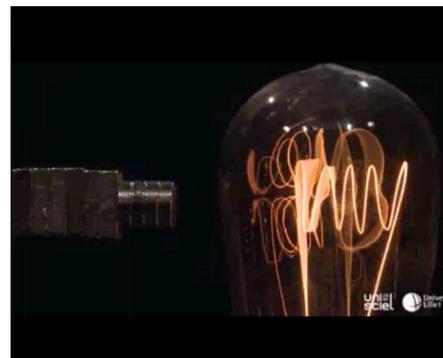


- 1) Montrer que le champ magnétostatique \vec{B} créé en M est orthoradial. Préciser alors la forme des lignes de champ.
- 2) Montrer que le champ magnétostatique ne dépend que d'une seule variable avec ce repérage cylindrique.
- 3) En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour C que l'on précisera, donner l'expression du champ magnétostatique en fonction de μ_0, I, r, R_1, R_2 et R_3 en un point M dans chacun des cas suivants : $r \geq R_3, R_2 \leq r \leq R_3, R_1 \leq r \leq R_2$ et $r \leq R_1$.
- 4) Dessiner l'allure de $B(r)$.

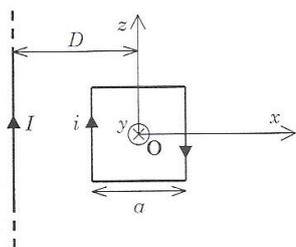
Force de Laplace

Activité 8 : Force de Laplace

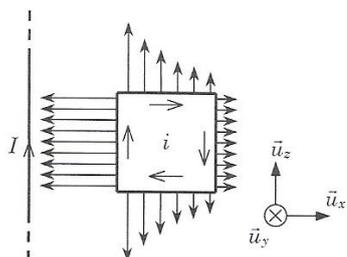
- A) Expliquer la mise en oscillation du filament d'une lampe à proximité d'un aimant.



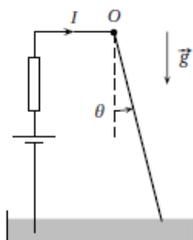
- B) Une spire carrée filiforme de côté a parcourue par un courant d'intensité $i > 0$ est placée à proximité du fil infini parcourue par un courant d'intensité $I > 0$. Les deux circuits sont coplanaires, et la distance D entre le centre O de la spire et le circuit rectiligne est supérieure à $a/2$.



- 1) Représenter la force de Laplace résultante s'appliquant sur chaque segment constituant la spire carrée.
- 2) Déterminer la force exercée par le fil sur la spire en fonction de a, R, i et I .



- 3) Donner la valeur de la force magnétostatique exercée par un fil supposé infini traversé par un courant d'intensité de 1A sur un circuit tel que $i = 1A, D = 1m$ et $a = 10cm$. On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} SI$. Devrons-nous prendre en considération cette force en TP ?
- C) Une tige conductrice homogène, de masse m et de longueur l (son centre de masse est au milieu), peut tourner parfaitement dans un plan vertical, autour d'un axe Oz . Son extrémité mobile affleure dans une cuve à mercure, ce qui permet le passage d'un courant permanent d'intensité I . On applique un champ magnétique \vec{B} uniforme et perpendiculaire au plan vertical.



Exprimer la position de repos θ_e de la tige en fonction des données du sujet.

Activité 9 : Contrôle d'un moteur pas à pas

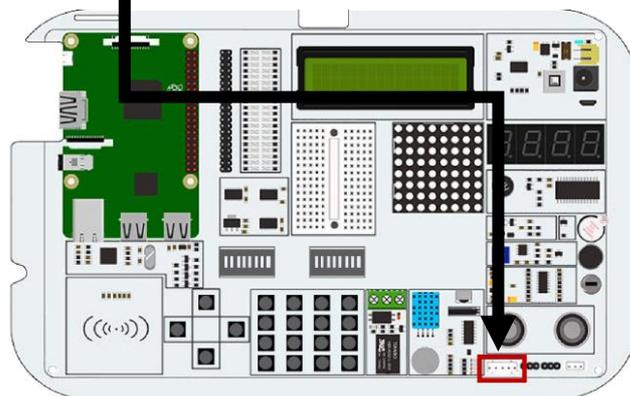
Voici la configuration des Switches pour cet exercice :



Le moteur pas à pas étudié est représenté ci-dessous :



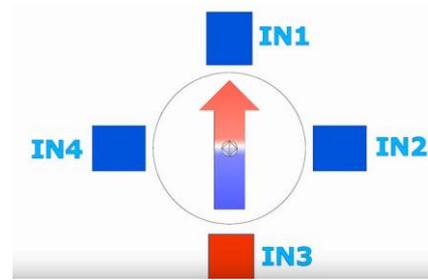
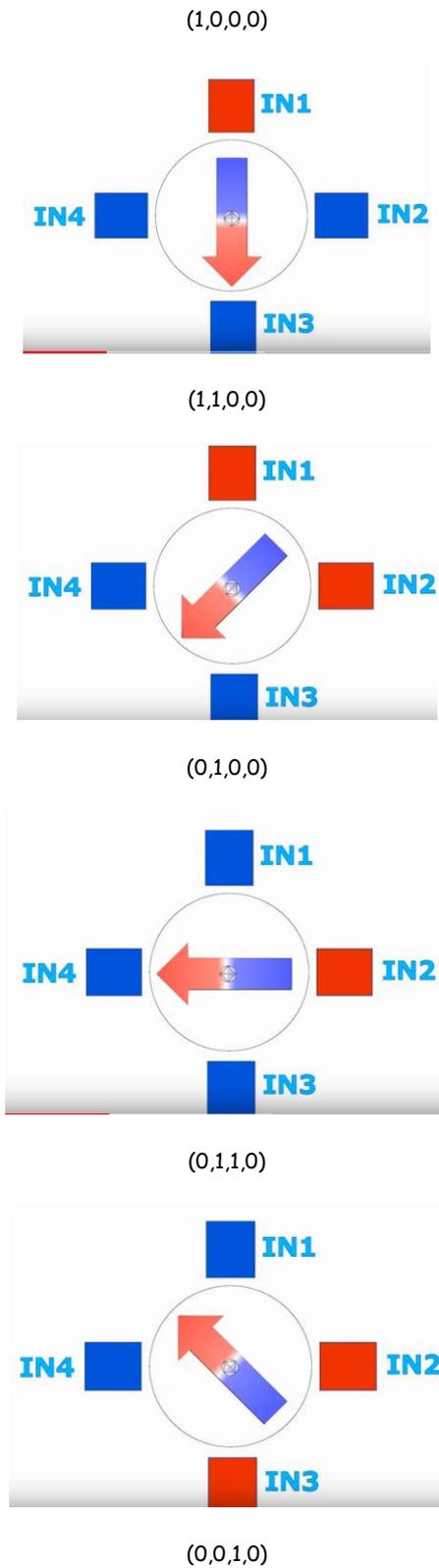
Ce moteur est branché sur la mallette :



I- Principe d'un moteur pas à pas

Voici le principe d'un moteur pas à pas dont le rotor est un aimant permanent et dont le stator est constitué de deux paires de bobinages (IN1,IN2,IN3,IN4). Le principe de rotation repose sur l'effet du moment de la force magnétique qui tend à aligner le rotor dans la direction et le sens du champ magnétique appliqué.

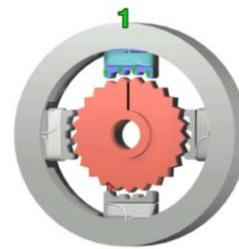
Voici une illustration simplifiée d'un moteur dont le pas est de 45° :



Et donc pour une rotation complète, il faut rajouter (0,0,1,1), (0,0,0,1), (1,0,0,1)

II- Moteur et alimentation

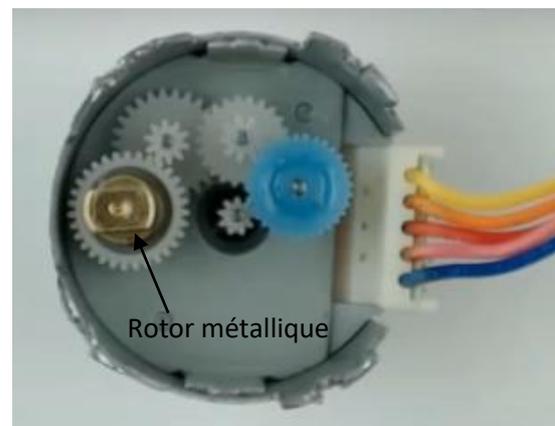
Le moteur pas à pas 28BYJ-48 étudié est représenté ci-dessous. Le rotor et le stator sont dentelés :



Les impulsions électriques émises sur les 4 fils (IN1,IN2,IN3,IN4) permettent donc une rotation avec un pas angulaire α . Dans notre cas, le pas angulaire est $\alpha = 5,625^\circ$ (car 32 dents sur le rotor) et il faut donc 64 pas pour une rotation complète.

Le cycle ci-dessous permet donc d'avancer de 4 dents : (1,0,0,0),(1,1,0,0),(0,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0),(0,0,1,1), (0,0,0,1),(1,0,0,1)

Enfin, ce moteur est muni d'engrenages :



Le pas angulaire apparent du rotor métallique devient alors $\frac{\alpha}{64}$.

On donne ci-dessous le programme moteur.py permettant d'imposer un cycle de rotation. Compléter

ce programme afin que le moteur effectue un tour complet.

```
import RPi.GPIO as GPIO
import time
GPIO.setmode(GPIO.BOARD)

control_pins = [29,31,33,35]#IN1,2,3 et 4
for pin in control_pins:
    GPIO.setup(pin, GPIO.OUT)#affectation en sortie
    #des fils d'alimentation des bobinages
    GPIO.output(pin, 0)#initialisation à l'état bas

seq = [
    [1,0,0,0],
    [1,1,0,0],
    [0,1,0,0],
    [0,1,1,0],
    [0,0,1,0],
    [0,0,1,1],
    [0,0,0,1],
    [1,0,0,1]
]

for j in range(8):
    for pin in range(4):
        GPIO.output(control_pins[pin], seq[j][pin])
    time.sleep(0.001)
GPIO.cleanup()
```