

Activité 0 : Utilisation directe du 1^{er} principe

De l'air assimilé à un gaz diatomique parfait de capacité thermique massique $c_p = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}$ s'écoule avec un débit massique $D_m = 600 \text{ kg} \cdot \text{min}^{-1}$. On prendra $R \approx 10 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M = 30 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\gamma = \frac{3}{2}$. On négligera les variations d'énergie cinétique et potentielles.

- Donner la puissance indiquée P_i mise en jeu par une turbine faisant passer le gaz de la température $T_1 = 300 \text{ K}$ à $T_2 = 100 \text{ K}$.
- Donner la puissance thermique P_{th} mise en jeu dans un condenseur faisant passer le gaz de T_2 à $T_3 = 50 \text{ K}$.

On a $D_m \Delta_s h = P_i + P_{th}$ donc $\begin{cases} P_i = D_m c_p (T_2 - T_1) = 2 \text{ MW} \\ P_{th} = D_m c_p (T_3 - T_2) = 0,5 \text{ MW} \end{cases}$

Activité 1 : Détente de Joule Thomson

Pour pratiquer la plongée sous-marine, l'air est stocké dans des bouteilles à la pression $P_e = 200 \text{ bar}$ et nécessite deux détendeurs de type capillaire pour « oxygéner » le plongeur.



Dans les détendeurs, l'écoulement est stationnaire, la conduite horizontale est calorifugée et variation d'énergie cinétique négligée.

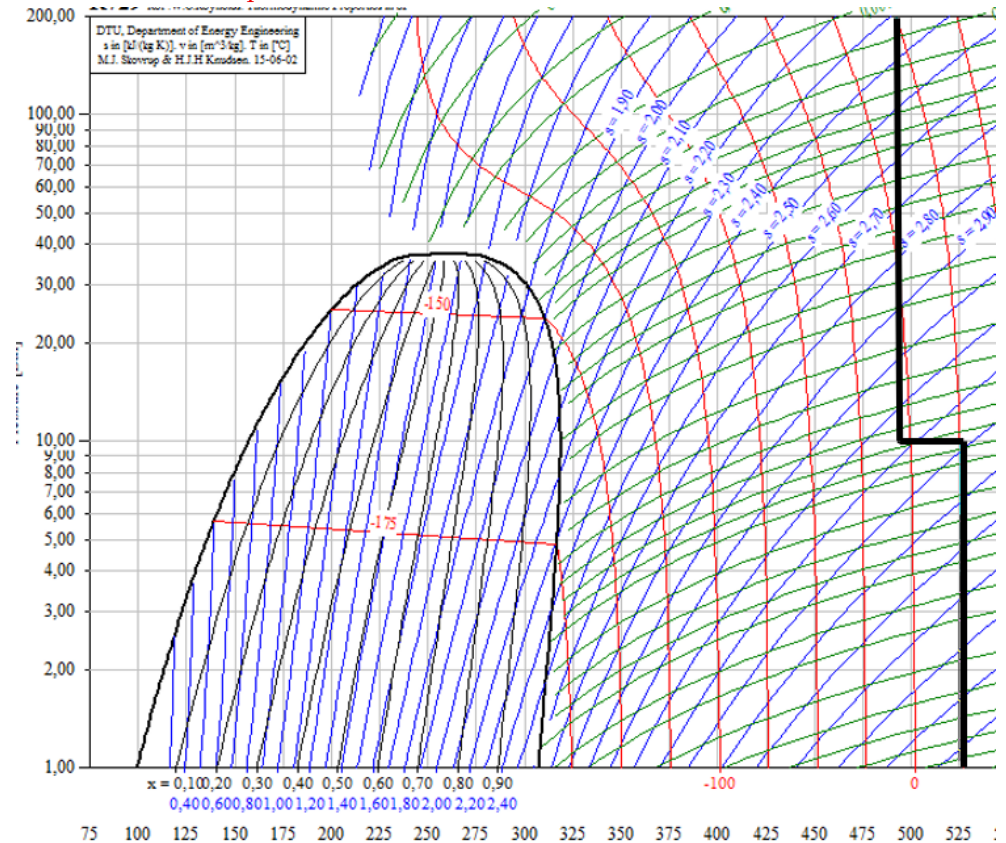
- 1) Justifier qu'une telle détente, appelée détente de Joule Thomson, est isenthalpique.
- 2) Si le gaz est supposé parfait, comment évolue la température au cours de la détente ?

Le détendeur primaire, placé sur la bouteille, assure la détente de la haute pression (200 bar à 20°C) vers une moyenne pression (10 bar). Un détendeur secondaire, placé au niveau de la bouche du plongeur, assure la détente vers la basse pression (1 bar). La première détente est accompagnée d'une baisse importante de température. L'air se réchauffe ensuite de manière isobare en circulant dans le tuyau arrivant jusqu'au deuxième détendeur. La deuxième détente est pratiquement isotherme, et le plongeur ne ressent pas une sensation d'air froid lors de l'inspiration.

- 3) Tracer ces transformations sur le graphe donné à la fin du TD.

- 4) Le modèle du gaz parfait est-il valable au cours des deux détentes ?

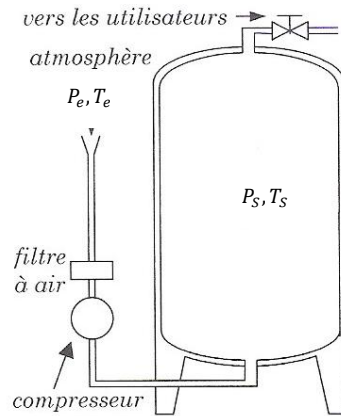
- 1) Avec les hypothèses de travail la détente est isenthalpe
- 2) Si GP, alors pas de variation de température
- 3) On a les représentations suivantes



- 4) La 1^{re} détente s'accompagne d'une baisse de température ce qui est logique car le modèle de GP n'est pas valable à 300K et 200bar

Activité 2 : Compresseur à air

On va étudier un compresseur qui prélève de l'air avec un débit permanent $D_m = 100 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ dans l'atmosphère à la pression P_e et à la température $T_e = 300 \text{ K}$, et l'envoie comprimé dans un grand réservoir de stockage à pression constante $P_s = 10 \text{ bar}$ alimentant une installation industrielle (la vitesse de l'air est nulle dans l'atmosphère et dans le réservoir). L'air est supposé équivalent à un gaz parfait de masse molaire $M \approx 30 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $\gamma \approx 1,5$ et $R \approx 10 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. On suppose la compression adiabatique et mécaniquement réversible et on néglige la variation d'énergie potentielle.



- 1) Estimer la température T_s de l'air après compression
- 2) Déterminer la puissance mécanique P_i mis en jeu par le compresseur. On prendra $10^{1/3} \approx 2$

Cette transformation est donc en équilibre mécanique mais aussi en équilibre thermique interne. L'absence de frottement la rend donc réversible. La transformation est donc adiabatique et réversible, nous pouvons utiliser les formules de Laplace :

$$PV^\gamma = Cte$$

$$TV^{\gamma-1} = Cte$$

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Cte$$

$$\text{Donc : } T_s = T_e \left(\frac{P_e}{P_s} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\text{AN : } T_s \approx 600 \text{ K}$$

D'après le 1^e principe des systèmes en écoulement :

$$\text{D'où : } P_{gaz} = D_m c_p (T_s - T_e) = \frac{R D_m \gamma}{M(\gamma-1)} (T_s - T_e)$$

$$\text{AN : } P_{gaz} \approx 10 \text{ kW}$$

RQ : D'après l'identité thermodynamique : $\Delta h = \int_{P_1}^{P_2} v dP$ ce qui correspond à l'air sous la courbe de la fonction $v(P)$ qui s'identifie au cycle du diagramme de Watt :

$$\Delta h = \int_{P_0}^{P_1} v dP = P_0^{\frac{1}{\gamma}} v_0 \int_{P_0}^{P_1} \frac{dP}{P^{\frac{1}{\gamma}}} = P_0^{\frac{1}{\gamma}} v_0 \left[\frac{P^{-\frac{1}{\gamma}+1}}{-\frac{1}{\gamma}+1} \right]_{P_0}^{P_1} = \gamma \frac{P_0^{\frac{1}{\gamma}} v_0}{\gamma-1} \left(P_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

$$\Delta h = \gamma \frac{P_0 v_0}{\gamma-1} \left(\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = \gamma \frac{RT_0}{(\gamma-1)M} \left(\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

$$\text{On a donc : } \Delta h = c_p (T_1 - T_0) = w^* = c_p T_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = c_p T_0 \left(\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) =$$

$$\gamma \frac{RT_0}{(\gamma-1)M} \left(\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Activité 3 : Compresseur multi étagé

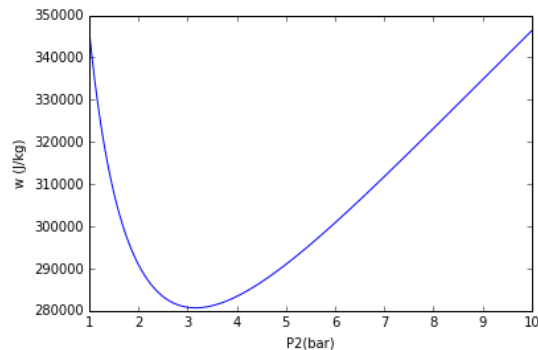
Le compresseur précédent présente un défaut : sa compression adiabatique mécaniquement réversible chauffe le gaz ce que ne facilite pas sa compression. On propose dans cet exercice d'étudier une alternative : une compression étagée avec une première compression adiabatique mécaniquement réversible de l'état 1 ($P_1 = 1\text{bar}, T_1 = 300\text{K}$), jusqu'à un état 2 (P_2, T_2). Un refroidissement isobare est alors amorcé entre l'état 2 et l'état 3 ($P_3 = P_2, T_3 = T_1$) puis une compression adiabatique mécaniquement réversible jusqu'à l'état 4 ($P_4 = 10\text{bar}, T_4$). Un nouveau refroidissement isobare est ensuite opéré pour revenir à 300K. Le gaz sera considéré parfait et le facteur isentropique $\gamma = 1,5$. Les refroidissements sont effectués au contact d'échangeurs thermiques (aucun travail échangé pour ces transformations avec le gaz en écoulement).

- 1) Exprimer le travail massique total de compression en fonction de $\gamma, T_1, M, \frac{P_2}{P_1}$ et $\frac{P_4}{P_2}$

On définit sur python la fonction suivante retournant la fonction $w(P_2)$

```
#constantes
gamma=1.5
R=10
T1=300
M=30*10**-3
P4=10
P1=1
K=(R*gamma*T1)/(M*(gamma-1))
# définition de w
def w(P2):
    return K*((P4/P2)**((gamma-1)/gamma)+(P2/P1)**((gamma-1)/gamma)-2)
```

Il est alors facile d'obtenir le graphe $w(P_2)$:



- 2) Décrire alors ce que calcule la fonction Pmin() ci-dessous :

```
def Pmin():
    Pinf=1
    Psup=1+0.1
    while w(Psup)-w(Pinf)<0:
        Pinf=Psup
        Psup=Psup+0.1
    return Psup
```

- 3) Exprimer « à l'aide d'un calcul fait main » la pression intermédiaire $P_2 = P_{2,min}$ conduisant au travail minimal pour P_1 et P_4 quelconques.
 4) Tracer les transformations sur le diagramme $p(h)$ fourni à la fin du TD.
 5) Comparer ce compresseur à celui de l'exercice précédent en utilisant un diagramme de Clapeyron.

Pour la première compression :

$$w_1 = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} (T_2 - T_1) = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_1}{P_3} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$$

Pour la deuxième compression :

$$w_2 = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} (T_4 - T_3) = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} \left(T_1 \left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_1 \right)$$

$$w_2 = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$$

Et le travail est :

$$w = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_3}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right)$$

Cette fonction présente un minimum et ce dernier peut se calculer en commençant à 1bar. La précision sera de 0,1bar

On peut chercher par calcul la valeur de $P_{2,min}$ minimisant le travail et donc associé à une dérivée qui s'annule en changeant de signe pour cette valeur :

$$\frac{dw}{dP_2} = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(-\frac{P_4}{P_2^2} \left(\frac{P_4}{P_2} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} + \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right)$$

$$\frac{dw}{dP_2} = \frac{RT_1}{M} \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \left(1 - \frac{P_4 P_1}{P_2^2} \left(\frac{P_4 P_1}{P_2^2} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right)$$

$$\frac{dw}{dP_2} = \frac{RT_1}{M} \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{P_4 P_1}{P_2^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

Donc $P_{2,min} = \sqrt{P_1 P_4}$ et correspond bien à une inversion de signe de la dérivée associée à un minimum.

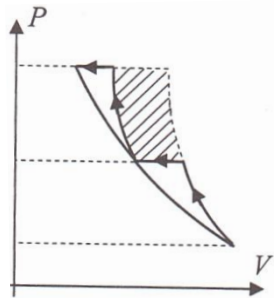
Donc :

$$w = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_4}{\sqrt{P_1 P_4}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{\sqrt{P_1 P_4}}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right)$$

$$w = \frac{2R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right)$$

$P_2 \approx 3bar$ et avec le graphe :

Etat 1	Etat 2	Etat 3	Etat 4
P_1 = 1bar,	P_2 ≈ 3bar,	P_3 ≈ 3bar,	P_4 = 10bar,
T_1 = 300K	T_2 ≈ 450K	T_3 = 300K	T_4 ≈ 450K



On voit sur le diagramme de Clapeyron que les refroidissements successifs permettent de diminuer le travail de compression par rapport à une seule adiabatique. On comprend alors qu'en se rapprochant d'une compression isotherme avec une multitude de paliers, on améliore l'efficacité du système (mais en perd en rapidité car il faut un échange thermique avec un échangeur pour assurer le refroidissement et le système est plus complexe !).

On peut comparer le travail mis en jeu pour les compresseurs entre les mêmes pressions initiale et finale :

$$\frac{w_{2 \text{ etages}} - w_{simple}}{w_{simple}} = \frac{2 \left(\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) - \left(\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}{\left(\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}$$

Soit 20% d'économie

Donc avec N étages et en prenant $\frac{P_{i+1}}{P_i} = Cte$ entre deux étages :

$$w_i = 3c_p T_{ini} \left(\left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$$

On a aussi : $\frac{P_{fin}}{P_{ini}} = \left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right)^N$

Donc si N étages

$$w_i = Nc_p T_{ini} \left(\left(\frac{P_{fin}}{P_{ini}}\right)^{\frac{1-\gamma}{N\gamma}} - 1 \right)$$

On pose $\left(\frac{P_{fin}}{P_{ini}}\right)^{\frac{1-\gamma}{N\gamma}} = r^{\frac{k}{N}}$ avec $r = \frac{P_{fin}}{P_{ini}}$ et $k = \frac{1-\gamma}{\gamma}$ donc $w_i = \frac{NR\gamma T_i}{M(\gamma-1)} \left(r^{\frac{k}{N}} - 1 \right)$

Et on pose $a = k \ln(r)$ donc $r = \exp\left(\frac{a}{k}\right)$ et $w_i = \frac{NR\gamma T_i}{M(\gamma-1)} \left(\exp\left(\frac{a}{N}\right) - 1 \right)$

Avec N grand, on peut faire le DL : $w_i = \frac{NR\gamma T_i}{M(\gamma-1)} \frac{a}{N} = -\frac{RT_i}{M} \ln(r)$

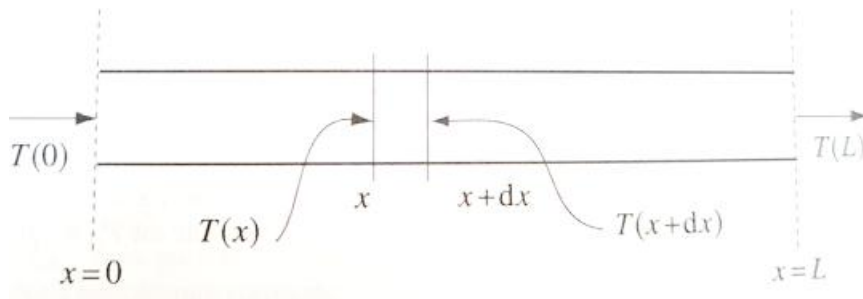
Et on retrouve le travail isotherme.

Activité 4 : Echangeur thermique

On considère un ballon d'eau chaude alimentant un tuyau de longueur L (d'axe Ox) et de rayon R puis un radiateur.

- T_{ext} la température de l'extérieur
- T_0 la température en entrée du tuyau
- T_1 la température en sortie du tuyau
- c la capacité thermique de l'eau
- D_m le débit massique

On donne la puissance linéique perdue par l'eau dans le tuyau : $P_l = 2\pi R h (T_{ext} - T(x))$.



- 1) Adapter l'écriture du premier principe des système en écoulement sous la forme d'un bilan de puissance en tenant compte des hypothèses de travail et en travaillant sur le système ouvert suivant : une tranche élémentaire dx du tuyau (représenté ci-dessus)
- 2) Donner l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$
- 3) En déduire l'expression de T_1
- 4) L'eau ressort du radiateur à la température T_{ext} . Que vaut la puissance P_0 perdue pendant l'ensemble de son trajet en fonction de D_m, c, T_{ext}, T_0 ?

- 5) En déduire que : $T_1 = -\frac{P_0}{D_m c} e^{-\frac{2\pi R h}{D_m c} L} + T_{ext}$

- 6) Quel débit permet de maximiser la valeur de T_1 ? Pourquoi choisir ce débit ?

$$\frac{dT}{dx} + \frac{2\pi R h}{D_m c} T = \frac{2\pi R h}{D_m c} T_{ext}$$

$$T(x) = (T_0 - T_{ext}) e^{-\frac{2\pi R h}{D_m c} x} + T_{ext}$$

$$\text{Donc : } T_1 = (T_0 - T_{ext}) e^{-\frac{2\pi R h}{D_m c} L} + T_{ext}$$

$$\text{Or } P_0 = D_m c (T_{ext} - T_0) < 0$$

$$T_1 = -\frac{P_0}{D_m c} e^{-\frac{2\pi R h}{D_m c} L} + T_{ext}$$

Et donc :

$$\frac{dT_1}{dD_m} = -\frac{P_0}{c} e^{-\frac{D_m c}{2\pi R h} L} \left(-\frac{1}{D_m^2} + \frac{2\pi R h}{D_m^3 c} \right)$$

On annule cette dérivée pour $D_m = \frac{2\pi R h}{L c}$: c'est le débit permettant d'alimenter au mieux le système de chauffe

