MODELISATION DE LA NUMERISATION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Rappels mathématiques :

Sur le développement en série de Fourier :

Soit $u(t)$ une tension de forme quelconque mais périodique de pulsation $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, le mathématicien Fourier a démontré que $u(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(t) = u_{moy} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\,(n\,\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\,(n\,\omega_0 t)$$

Avec une valeur moyenne donnée par $u_{moy} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)dt$ et des coefficients de Fourier vérifiant :

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\,cos(n\omega_0 t)\,dt \text{ et } b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\,sin(n\omega_0 t)\,dt$$

Sur la transformée de Laplace :

On rappelle la transformée de Laplace d'un signal causal $f(t)$ (fonction nulle pour $t < 0$):

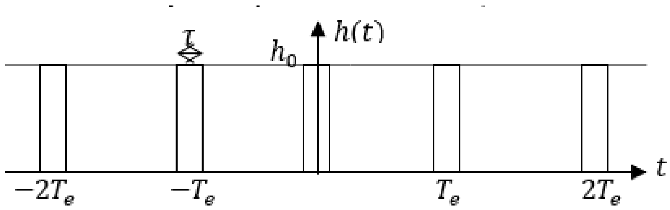
$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \text{ (où } p \text{ est la variable de Laplace)}$$

On rappelle également le théorème du retard (avec τ traduisant un temps de retard) :

$$\begin{cases} Si\ f(t) \xrightarrow{L(p)} F(p) \\ Alors\ f(t-\tau) = \exp(-\tau p)\,F(p) \end{cases}$$

I- Echantillonnage :

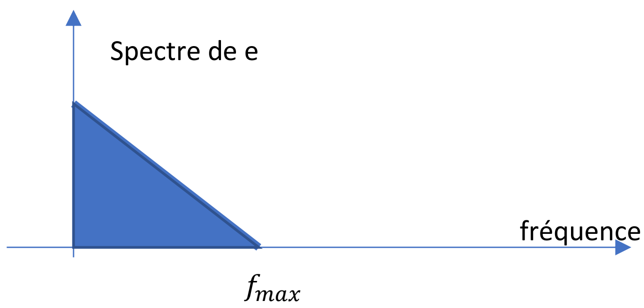
On peut décrire l'échantillonnage d'un signal $e(t)$ comme la multiplication $e(t) \times h(t)$ où $h(t)$ est telle que :



1) Justifier que $h(t)$ peut s'écrire sous la forme : $h(t) = h_{moy} + \sum_{i=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_e}\right)$
2) Exprimer h_{moy} en fonction de T_e, τ et h_0
3) Montrer que $a_n = \frac{2h_0\tau}{T_e}\text{sinc}\left(\frac{n\omega_e\tau}{2}\right)$ avec $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

On considère un échantillonnage tel que $\tau \ll T_E$ on a alors : $a_n \approx \frac{2h_0\tau}{T_e}$

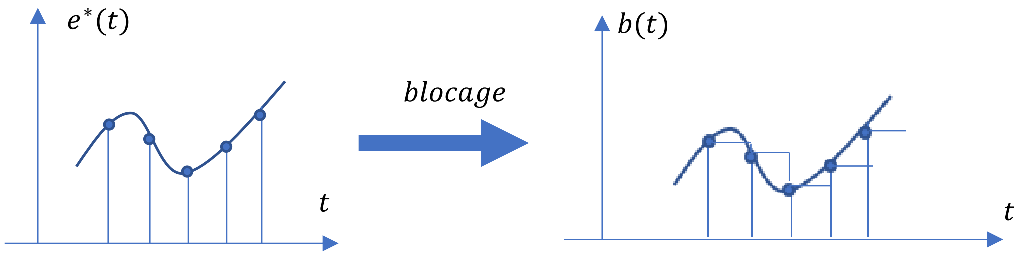
4) Soit $e^*(t) = e(t) \times h(t)$ le signal échantillonné avec $h_0 = 1$. Dessiner le spectre du signal échantillonné si $e(t) = Ecos(\omega_u t)$.
5) Soit un signal $e(t)$ échantillonné plus complexe dont on donne le spectre ci-dessous. Justifier et énoncer le critère de Shannon en analysant le spectre de e^*.



6) Le signal utile $e(t)$ est de fréquence maximale de $10kHz$. L'échantillonnage est effectué à $110kHz$. On souhaite récupérer $e(t)$ à partir de $e^*(t)$. Quel est l'ordre du filtre permettant d'atténuer d'un facteur d'au moins 100 les fréquences inutiles.

II- Blocage

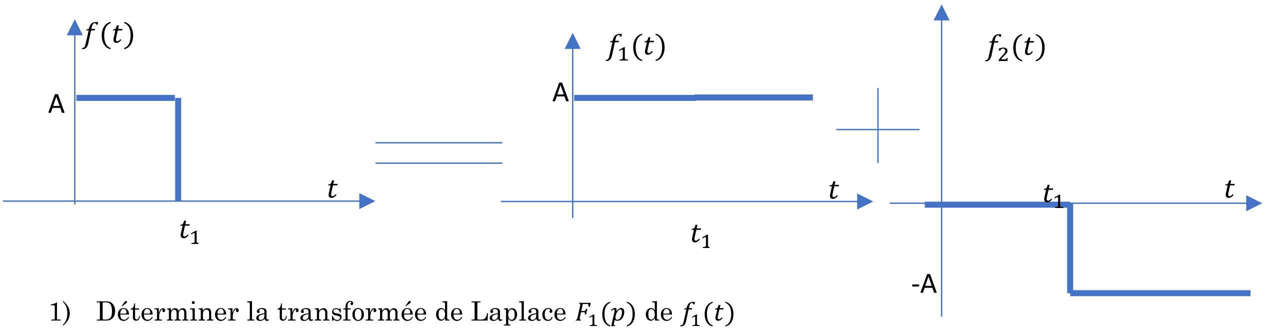
Le blocage (d'ordre zéro) de l'échantillon est le maintien de sa valeur pendant la durée T_e :



Dans la suite, on va étudier l'effet de la fonction blocage sur un échantillon.

A) Questions préalables

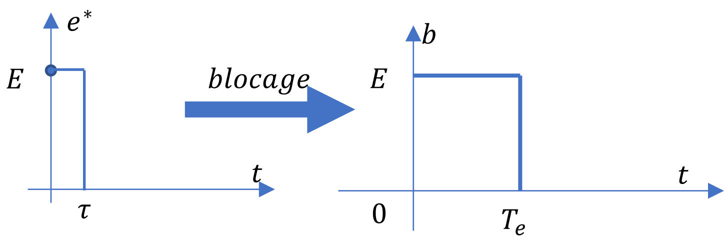
Soit un signal impulsionnel $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ représenté ci-dessous :



1) Déterminer la transformée de Laplace $F_1(p)$ de $f_1(t)$
2) En déduire, à l'aide du théorème du retard, la transformée de Laplace $F_2(p)$ de $f_2(t)$
3) En déduire la transformée de Laplace $F(p)$ de $f(t)$
4) En déduire, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, la transformée de Laplace d'une impulsion pour laquelle $t_1 \to 0$.

B) Application au blocage

Considérons une tension analogique continue d'amplitude E. Cette tension est échantillonnée suivant le processus présenté dans la partie I). Chaque échantillon a pour amplitude E pendant un temps τ. On modélise le blocage d'ordre 0 par le processus ci-dessous : l'échantillon d'amplitude E est bloqué pendant $T_e \gg \tau$ car $\tau \to 0$

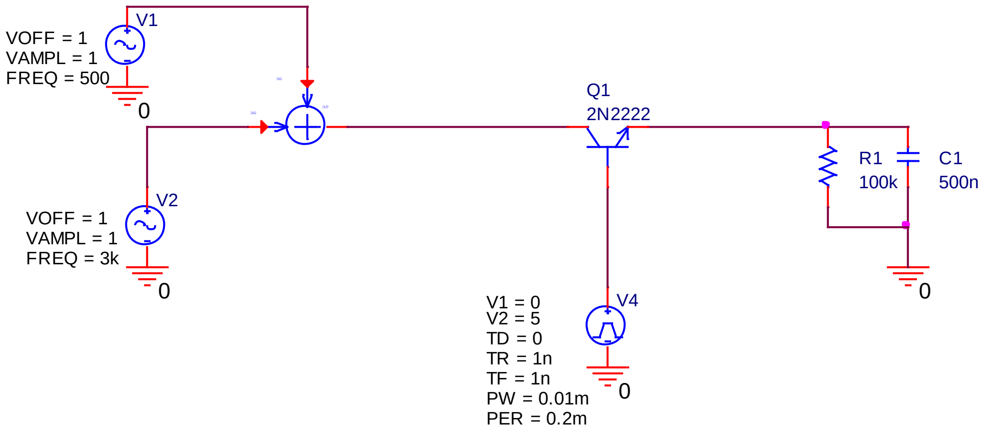


5) Montrer que la fonction de transfert $B(p)$ du bloqueur est : $B(p) = \frac{1}{\tau p}(1 - \exp(-T_E p))$
6) En utilisant l'équivalence des dérivées $p \equiv j\omega$, en déduire alors la fonction de transfert isochrone $\underline{B}(f)$ sous la forme $|\underline{B}(f)| = \frac{T_E}{\tau}|sinc(\pi T_E f)|$

7) Dessiner alors le spectre d'un signal $b(t)$ en sortie de bloqueur associé à un signal $e(t) = Ecos(\omega_u t)$ échantillonné puis bloqué.

III- Bilan

On peut modéliser l'action d'un échantillonneur par un transistor en commutation par une tension pulsée (ici V4), puis par l'action d'un bloqueur à l'aide d'une cellule RC.



1) Commenter la valeur de la constante de temps du circuit R1C1.
2) Justifier l'existence des 8 premières raies sur le spectre de simulation du signal aux bornes de C1 :