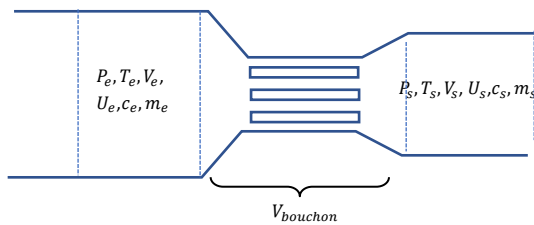


Activité 1 : Détente de Joule Thomson

La détente de Joule Thomson consiste à étudier un écoulement dans une conduite présentant une paroi poreuse et (ou) un étranglement contrariant le fluide dans son écoulement. Nous nous placerons dans les conditions d'études suivantes :

- En chaque point d'un volume de section $S(z)$ d'épaisseur dz de la conduite, on peut affecter une valeur à toute grandeur physique.
- L'écoulement est stationnaire.
- La conduite est horizontale et calorifugée.

On notera P_i les pressions, c_i les vitesses de l'écoulement, T_i les températures, U_i les énergies internes, V_i et m_i les volumes et masses associés aux tranches de fluides situées en amont et en aval. A l'instant t une masse donnée de fluide occupe le volume $V_e + V_{bouchon}$ et à l'instant $t + \Delta t$ la même masse occupe $V_{bouchon} + V_s$.



A) Questions de cours :

- 1) Montrer que le régime stationnaire implique la conservation du débit massique (le débit massique est le même en tout point).
- 2) Montrer, à partir du premier principe des systèmes fermés, que $h_s + \frac{c_s^2}{2} = h_e + \frac{c_e^2}{2}$ où h_e et h_s représentent l'enthalpie massique en amont et en aval du bouchon.

Comme dans le cours, l'hypothèse stationnaire permet d'affirmer que la masse de fluide dans le bouchon se conserve :

$$m_e + m_{bouchon}(t) = m_s + m_{bouchon}(t + \Delta t)$$

Et donc $m_e = m_s$ soit $\frac{m_e}{\Delta t} = \frac{m_s}{\Delta t} = D_m = Cte$

L'application du premier principe pour la masse étudiée conduit à (avec l'absence de paroi mobile et donc de travail autre que celui du travail des forces de pression):

$$\Delta_s H + \Delta_s E_c = 0$$

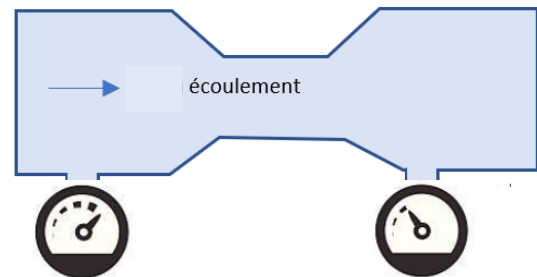
Et donc cette relation est valable pour 1kg de fluide :

$$h_s + \frac{c_s^2}{2} = h_e + \frac{c_e^2}{2}$$

B) Détente d'une phase condensée visqueuse

Une phase condensée est peu compressible et peu dilatable. On pourra donc souvent négliger les variations de volume d'un système fermé contenant une phase condensée.

- 1) Que dire des volumes V_e et V_s ?
- 2) Si $S_e = S_s$, que dire de c_s par rapport à c_e ?
- 3) En déduire alors que la détente est isenthalpique.
- 4) A partir de l'identité thermodynamique, montrer que si cet écoulement se produit nécessairement pour $P_e > P_s$.
- 5) On peut réaliser la détente de Joule avec un simple rétrécissement imposé à un écoulement liquide. On apprécie alors la valeur de la pression à l'aide de deux manomètres. Interpréter le résultat obtenu.



Si le fluide est incompressible alors $V_e = V_s$ et l'égalité des sections implique que le fluide est animé d'une vitesse $c_e = \frac{V_e}{S_e \Delta t}$ à l'entrée et $c_s = \frac{V_s}{S_s \Delta t} = c_e$.

Donc d'après le premier principe : $\Delta H = 0$

Si on utilise l'identité thermodynamique de cette transformation adiabatique alors :

$$dH = TdS + VdP = 0$$

Et :

$$dP = -\frac{T}{V}dS = -\frac{T}{V}\delta S_c < 0$$

On a donc bien une détente qui est à accorder aux effets de forces interne de viscosité. Sur le dispositif expérimental, on apprécie cette perte de pression à l'aide de manomètre à eau. La pression en amont est plus importante d'après la loi de la statique des fluides.

Pour le comprendre plus précisément, il faut revenir au 1^{er} principe et au TEC :

$$dE_c = \delta W_{c,ext} + \delta W_{nc,ext} + \delta W_{c,int} + \delta W_{nc,int}$$

Si on considère un fluide incompressible visqueux alors $\delta W_{c,int} = 0$ (car la distance entre particule ne pas évoluée

dans son ensemble) et $\delta W_{nc,int}$ représente le travail des forces de viscosité.

Donc dans le 1^{er} principe (si $\delta Q = 0$):

$$dU + dE_c + dE_p = \delta W_{nc,ext}$$

Et :

$$dU = -\delta W_{nc,int}$$

Donc dans l'identité thermodynamique :

$$dU = TdS - PdV = TdS = T\delta S_c$$

Implique bien :

$$T\delta S_c = -\delta W_{nc,int}$$

Dans le cas d'une détente de Joule : $\delta W_{nc,int} = v dP < 0$

La thermodynamique prend bien en compte le phénomène de perte de charge que l'on décrira en mécanique des fluides. Elle rajoute cependant une description plus complète impliquant une variation de température.

Cette variation est cependant faible car si isenthalpe $dh = du + v dP = c dT + v dP = 0$ et $\Delta T \approx -\frac{v \Delta P}{c} \approx -10^{-6} \Delta P$

Dans le cas d'un karcher pour lequel $\Delta P \approx -150 \text{ bar}$ alors $\Delta T \approx 15^\circ \text{C}$

C) Détente d'un gaz parfait si $S_e \neq S_s$

Un gaz est compressible mais un écoulement stationnaire et « lent » (inférieur à 300m/s) n'impose pas des contraintes suffisantes pour modifier notablement la masse volumique. Dans la suite, nous allons donc considérer un gaz parfait de masse volumique quasi-uniforme dans la canalisation à chaque instant.

- 1) Que dire des volumes V_e et V_s ?
- 2) Soient S_e et S_s les sections a priori différentes en amont et en aval du bouchon. Si $S_s < S_e$, que dire de c_s par rapport à c_e ?
- 3) Comment est-il possible de refroidir un gaz supposé parfait avec ce type de dispositif ? Proposer alors une géométrie pour la canalisation assurant un refroidissement.

La conservation de la masse et de la masse volumique implique la conservation du volume et donc $V_e = V_s$.

Si les sections sont différentes alors un même volume doit se répartir sur deux longueurs différentes et donc être associé à une vitesse d'écoulement différente. Si $S_s < S_e$ alors $c_s > c_e$. Nous pourrions justifier ce résultat plus quantitativement avec des éléments de mécanique

des fluides. En effet, pour un écoulement incompressible, on observe une conservation du débit volumique D_v défini, pour un écoulement uniforme sur la section droite S , par $D_v = vS = Cte$

On comprend alors la possibilité d'échange entre l'énergie cinétique et l'énergie thermique (car $h(T)$ pour les GP et phase condensée idéale). Augmenter la vitesse revient à diminuer la température du fluide si la canalisation se réduit (c'est le cas lorsque l'on expire en pinçant les lèvres)

D) Détente d'un gaz si $S_e = S_s$

Si on a $S_e = S_s$ (et donc $c_e \approx c_s$ si on suppose le gaz faiblement comprimé ce qui impose un écoulement « lent ») alors : $\Delta h \approx 0$

- 1) Un gaz à faible pression supposé parfait pénètre dans le détenteur de Joule. Quelle est sa variation de température ?

Dans le cas d'un gaz réel, on peut proposer l'expression suivante de son équation d'état ($a > 0$) :

$$PV_m = RT - \frac{a}{RT} P$$

On définit l'enthalpie molaire H_m par $H_m = U_m + PV_m = C_{vm}T + U_0 + PV_m$ où C_{vm} (capacité thermique molaire à volume constant) et U_0 sont des constantes

- 2) Montrer qu'une détente isenthalpique vérifie $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{H_m} = \frac{\frac{a}{RT}}{C_{pm} + \frac{aP}{RT^2}}$.
- 3) Que dire de l'évolution de la température dans le cas d'une détente isenthalpique de Joule-Thomson ?

Au cours d'une détente de joule pour un écoulement quasi-incompressible, la conservation de la section assure le maintien de la vitesse et donc de l'énergie cinétique : une détente de Joule est donc isenthalpique.

Pour un gaz parfait :

$\Delta h = 0$ implique également que $\Delta T = 0$.

Pour un gaz réel : On a $PV_m = RT - \frac{a}{RT} P$ donc : $H_m = C_{pm}T + U_0 - \frac{a}{RT} P$ Donc $dH_m = C_{pm}dT + \frac{aP}{RT^2} dT - \frac{a}{RT} dP$

Si $dH_m = 0$ alors $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\frac{a}{RT}}{C_{pm} + \frac{aP}{RT^2}} > 0$

Dans le cas d'une détente isenthalpe, $dP < 0$ et donc on observe un refroidissement. Ce type de détente permet donc de refroidir un gaz. Cette détente amenant même à sa liquéfaction dans les machines thermodynamiques

E) Etude d'un détendeur de plongée

Pour pratiquer la plongée sous-marine, l'air est stocké dans des bouteilles à la pression $P_e = 200\text{bar}$ et nécessite deux détendeurs de type capillaire pour « oxygéner » le plongeur.



On conserve les hypothèses précédentes (écoulement stationnaire, conduite horizontale calorifugée et variation d'énergie cinétique négligée : $dh \approx 0$). Le gaz est ici supposé « réel ».

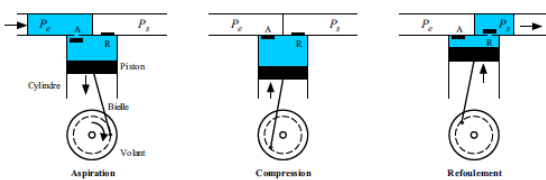
Le détendeur primaire, placé sur la bouteille, assure la détente de la haute pression (200 bar à 20°C) vers une moyenne pression (10 bar). Un détendeur secondaire, placé au niveau de la bouche du plongeur, assure la détente vers la basse pression (1 bar). La première détente est accompagnée d'une baisse importante de température. L'air se réchauffe ensuite de manière isobare en circulant dans le tuyau arrivant jusqu'au deuxième détendeur. La deuxième détente est pratiquement isotherme, et le plongeur ne ressent pas une sensation d'air froid lors de l'inspiration.

Tracer ces transformations sur le graphe donné à la fin du TD.

Activité 2 : Compresseur à air

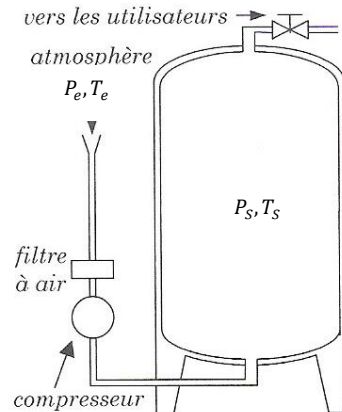
Un compresseur à air fonctionne sur le principe suivant :

- Une phase d'injection du fluide à comprimer : le fluide pousse la soupape A et pousse le piston.
- On ferme ensuite la soupape d'injection A et on comprime le gaz (on diminue le volume de la chambre en modifiant la position du piston et le gaz reçoit du travail par le compresseur)
- Une phase d'éjection du gaz comprimé vers une autre chambre lorsque la pression du gaz est suffisante pour ouvrir la soupape R.

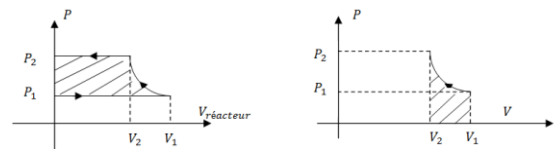


On va étudier un compresseur qui prélève de l'air avec un débit permanent $D_m = 100\text{kg} \cdot \text{h}^{-1}$ dans l'atmosphère à la pression P_e et à la température $T_e = 300\text{K}$, et l'envoi comprimé dans un grand réservoir de stockage à pression constante $P_s = 10\text{bar}$ alimentant une installation industrielle (la vitesse de l'air est nulle dans l'atmosphère et dans le réservoir). L'air est supposé équivalent à un gaz parfait de masse molaire $M \approx 30\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $\gamma \approx$

$1,5$ et $R \approx 10\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. On suppose la compression adiabatique et mécaniquement réversible et on néglige la variation d'énergie potentielle.



- 1) On différencie deux types de diagramme pour le traitement thermodynamique d'un fluide en écoulement. Le diagramme de Watt $P(V_{\text{réacteur}})$ (point de vue du réacteur : admission, refoulement et compression) et le diagramme de Clapeyron $P(V)$ (point de vue du gaz : seule la compression d'une quantité donnée de gaz est représentée). Dessiner ces deux diagrammes si le fluide à comprimer est un kilogramme de gaz.



Dans le diagramme de Watt, on représente tout le travail utile (celui mis en jeu lors de la phase d'admission, de refoulement et celui de la compression). Dans le diagramme de Clapeyron, on ne représente que le travail de compression. Ce dernier diagramme ne rend pas compte du travail des forces de pression lors de l'admission et du refoulement.

- 2) Justifier que le fonctionnement du compresseur soit réversible et montrer que Δh peut être obtenu graphiquement à l'aide du diagramme de Watt.

Pendant la phase d'admission, de compression et de refoulement le gaz n'est pas en déséquilibre avec l'extérieur et l'hypothèse GP+mec rev assure que le cycle est réversible.

D'après l'identité thermodynamique : $\Delta h = \int_{P_1}^{P_2} v dP$ ce qui correspond à l'air sous la courbe de la fonction $v(P)$ qui s'identifie au cycle du diagramme de Watt :

$$\Delta h = \int_{P_0}^{P_1} v dP = P_0^{\frac{1}{\gamma}} v_0 \int_{P_0}^{P_1} \frac{dP}{P^{\frac{1}{\gamma}}} = P_0^{\frac{1}{\gamma}} v_0 \left[\frac{P^{-\frac{1}{\gamma}+1}}{-\frac{1}{\gamma}+1} \right]_{P_0}^{P_1}$$

$$= \gamma \frac{P_0^{\frac{1}{\gamma}} v_0}{\gamma-1} \left(P_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

$$\Delta h = \gamma \frac{P_0 v_0}{\gamma-1} \left(\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = \gamma \frac{RT_0}{(\gamma-1)M} \left(\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

On a donc : $\Delta h = c_p(T_1 - T_0) = w^* = c_p T_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = c_p T_0 \left(\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = \gamma \frac{RT_0}{(\gamma-1)M} \left(\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$

- 3) Estimer la température T_s de l'air après compression et la puissance mécanique P_{gaz} reçue par l'air entre l'atmosphère et le réservoir. On prendra $10^{1/3} \approx 2$

Cette transformation est donc en équilibre mécanique mais aussi en équilibre thermique interne. L'absence de frottement la rend donc réversible. La transformation est donc adiabatique et réversible, nous pouvons utiliser les formules de Laplace :

$$PV^\gamma = Cte$$

$$TV^{\gamma-1} = Cte$$

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Cte$$

Donc : $T_s = T_e \left(\frac{P_e}{P_s} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

AN : $T_s \approx 600K$

Si on considère l'écoulement d'une masse m alors, pour cette transformation adiabatique, on a rapidement :

$$\Delta(H_{gaz}) = mc_p(T_s - T_e) = W_{gaz}$$

Ainsi pour une masse élémentaire $\delta W_{gaz} = dmc_p(T_s - T_e)$

D'où : $P_{gaz} = \frac{\delta W_{gaz}}{dt} = D_m c_p (T_s - T_e) = \frac{RD_m \gamma}{M(\gamma-1)} (T_s - T_e)$

AN : $P_{gaz} \approx 10kW$

Activité 3 : Compresseur multi étagé

Le compresseur précédent présente un défaut : sa compression adiabatique mécaniquement réversible chauffe le gaz ce que ne facilite pas sa compression. On

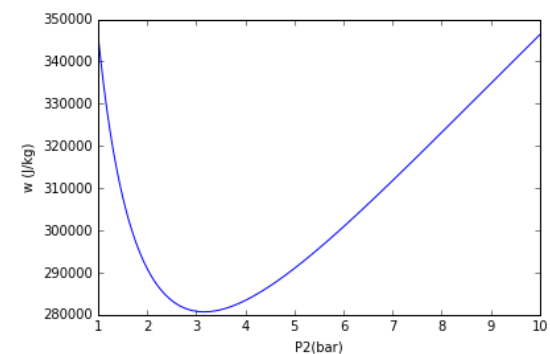
propose dans cet exercice d'étudier une alternative : une compression étagée avec une première compression adiabatique mécaniquement réversible de l'état 1 ($P_1 = 1bar, T_1 = 300K$), jusqu'à un état 2 (P_2, T_2). Un refroidissement isobare est alors amorcé entre l'état 2 et l'état 3 ($P_3 = P_2, T_3 = T_1$) puis une compression adiabatique mécaniquement réversible jusqu'à l'état 4 ($P_4 = 10bar, T_4$). Un nouveau refroidissement isobare est ensuite opéré pour revenir à 300K. Le gaz sera considéré parfait et le facteur isentropique $\gamma = 1.5$. Les refroidissements sont effectués au contact d'échangeurs thermiques (aucun travail échangé pour ces transformations avec le gaz en écoulement).

- 1) Exprimer le travail massique total de compression en fonction de $\gamma, T_1, M, \frac{P_2}{P_1}$ et $\frac{P_4}{P_2}$

On définit sur python la fonction suivante retournant la fonction $w(P_2)$

```
#constantes
gamma=1.5
R=10
T1=300
M=30*10**-3
P4=10
P1=1
K=(R*gamma*T1)/(M*(gamma-1))
# définition de w
def w(P2):
    return K*((P4/P2)**((gamma-1)/gamma))+ (P2/P1)**((gamma-1)/gamma)-2
```

Il est alors facile d'obtenir le graphe $w(P_2)$:



- 2) Décrire alors ce que calcule la fonction $P_{min}()$ ci-dessous :

```
def Pmin():
    Pinf=1
    Psup=1+0.1
    while w(Psup)-w(Pinf)<0:
        Pinf=Psup
        Psup=Psup+0.1
    return Psup
```

- 3) Exprimer « à l'aide d'un calcul fait main » la pression intermédiaire $P_2 = P_{2,min}$ conduisant au travail minimal pour P_1 et P_4 quelconques.

- 4) Tracer les transformations sur le diagramme $p(h)$ fourni à la fin du TD.
- 5) Comparer ce compresseur à celui de l'exercice précédent en utilisant un diagramme de Clapeyron.

Pour la première compression :

$$w_1 = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T_2 - T_1) = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$$

Pour la deuxième compression :

$$w_2 = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T_4 - T_3) = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} \left(T_1 \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_1 \right)$$

$$w_2 = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$$

Et le travail est :

$$w = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right)$$

Cette fonction présente un minimum et ce dernier peut se calculer en commençant à 1bar. La précision sera de 0,1bar

On peut chercher par calcul la valeur de $P_{2,min}$ minimisant le travail et donc associée à une dérivée qui s'annule en changeant de signe pour cette valeur :

$$\frac{dw}{dP_2} = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(-\frac{P_4}{P_2^2} \left(\frac{P_4}{P_2}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} + \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right)$$

$$\frac{dw}{dP_2} = \frac{RT_1}{M} \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} \left(1 - \frac{P_4 P_1}{P_2^2} \left(\frac{P_4 P_1}{P_2^2}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} \right)$$

$$\frac{dw}{dP_2} = \frac{RT_1}{M} \frac{1}{P_1} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{P_4 P_1}{P_2^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)$$

Donc $P_{2,min} = \sqrt{P_1 P_4}$ et correspond bien à une inversion de signe de la dérivée associée à un minimum.

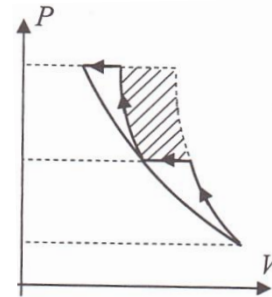
Donc :

$$w = \frac{R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_4}{\sqrt{P_1 P_4}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{\sqrt{P_1 P_4}}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right)$$

$$w = \frac{2R\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right)$$

$P_2 \approx 3bar$ et avec le graphe :

Etat 1	Etat 2	Etat 3	Etat 4
$P_1 = 1bar,$	$P_2 \approx 3bar,$	$P_3 \approx 3bar,$	$P_4 = 10bar,$
$T_1 = 300K$	$T_2 \approx 450K$	$T_3 = 300K$	$T_4 \approx 450K$



On voit sur le diagramme de Clapeyron que les refroidissements successifs permettent de diminuer le travail de compression par rapport à une seule adiabatique. On comprend alors qu'en se rapprochant d'une compression isotherme avec une multitude de paliers, on améliore l'efficacité du système (mais en perd en rapidité car il faut un échange thermique avec un échangeur pour assurer le refroidissement et le système est plus complexe !).

Pour N étapes identiques à celle étudiée, on a (en remplaçant les facteurs 2 par N)

$$w = \frac{NR\gamma T_1}{M(\gamma-1)} \left(\left(\frac{P_{fin}}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{N\gamma}} - 1 \right)$$

Le comportement asymptotique de cette fonction est le travail isotherme

On peut comparer le travail mis en jeu pour les compresseurs entre les mêmes pressions initiale et finale :

$$\frac{w_{2\text{ etages}} - w_{simple}}{w_{simple}} = \frac{2 \left(\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) - \left(\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}{\left(\left(\frac{P_4}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}$$

Soit 20% d'économie !

