Activité 1 : Etude de structures simples avec le théorème de Gauss

1) On va chercher à déterminer, en repérage sphérique (r, θ, φ), le champ électrostatique créé par une sphère, de centre O, de rayon R, chargée uniformément en surface avec une densité $\sigma > 0$. La charge totale est donc $Q = \sigma 4\pi R^2$.
   a) Calcul du flux de $\vec{E}$: $\phi = \oiint_\Sigma \vec{E}(M)\, d\vec{S}(M)$
      i) Faire l'analyse des invariances de la fonction densité surfacique de charges et en déduire la variable dont dépend le champ électrostatique.
      ii) Faire l'analyse des symétries de la distribution de charges et en déduire la direction du champ électrostatique.
      iii) Vérifier alors qu'une surface de Gauss sphérique de rayon r et de centre O est appropriée pour obtenir l'expression de ϕ. Exprimer alors ce flux.

L'ensemble des plans de symétrie contenant le point le point O et le point M, où l'on cherche à déterminer le champ, sont des plans de symétrie.

L'intersection de ces plans se fait suivant $\vec{e_r}$. Donc $\vec{E}(r,\vartheta,\varphi) = E(r,\vartheta,\varphi)\vec{e_r}$.

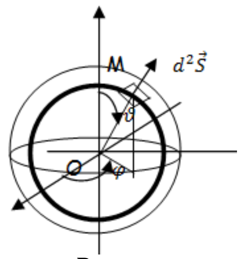
La distribution de charges est indépendante des paramètres θ et φ, donc $\vec{E}(r,\vartheta,\varphi) = E(r)\vec{e_r}$.

Une surface de Gauss sphérique de rayon r est appropriée ici compte tenue des résultats précédents

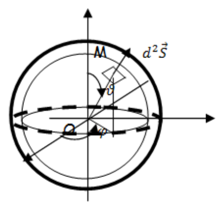
$$\phi = \oiint_\Sigma \vec{E}(M) d^2\vec{S} = \oiint_\Sigma E(M)\vec{e_r}.dS\,\vec{e_r} = \oiint_\Sigma E(M).dS = E(M) \times 4\pi r^2$$

   b) Détermination de Q_{int}
      i) Déterminer la charge Q_{int} présente à l'intérieure de la surface de Gauss si $r < R$
      ii) Déterminer la charge Q_{int} présente à l'intérieure de la surface de Gauss si $r > R$

On peut distinguer deux cas :



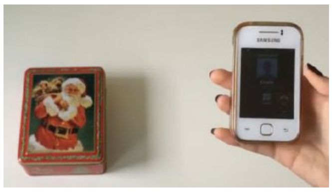
$r > R$



$r < R$

- $r > R$ alors $Q_{int} = Q$
- $r < R$ alors $Q_{int} = 0$

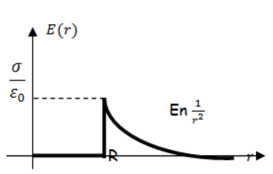
   c) Appliquer le théorème de Gauss et en déduire l'expression du champ en tout point de l'espace.
   d) En utilisant la continuité du potentiel $V(r)$ et en posant $V(\infty) = 0$, donner l'expression du potentiel électrostatique en tout point de l'espace à l'aide de $E(r)$.
   e) Tracer les fonctions $E(r)$ et $V(r)$.
   f) Placer une radio ou un téléphone dans une boîte métallique. Expliquer l'absence de signal transmis.

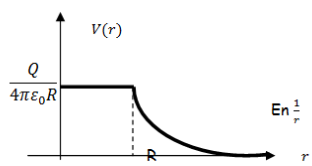


On applique le théorème de Gauss

$r > R$	$r < R$
$\phi = E(M) \times 4\pi r^2$ $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$ On peut déterminer le potentiel $V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + Cte$ On en déduit le potentiel associé : En prenant $V(\infty) = 0$, alors : $V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\phi = E(M) \times 4\pi r^2$ $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ $E = 0$ Le potentiel est alors constant $V(M) = Cte$. Cette constante doit vérifier la continuité du potentiel électrique en $r = R$ donc : $V(O) = V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

On peut tracer les profils associés :





2) Un cylindre infini, de rayon R, porte une charge répartie uniformément en volume avec une densité volumique ρ_0 positive.
   a) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ en un point quelconque de l'espace (on dégagera donc 2 situations $r \leq R$ et $r \geq R$). Représenter le graphe $E(r)$.

b) Construire le potentiel électrostatique V en choisissant son origine à la surface du cylindre $V(r=R)=0$. Représenter ce potentiel $V(r)$ et donner sa valeur sur l'axe de révolution du cylindre.

En proposant une surface de Gauss cylindrique, on trouve l'expression du champ pour r donné :

- $E(r)=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ pour $r<R$
- $E(r)=\frac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}$ pour $r>R$

On trouve le potentiel associé :

- $V(r)=\frac{\rho(R^2-r^2)}{4}$ pour $r<R$
- $V(r)=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right)$ pour $r>R$

Activité 2 : Rayon classique de l'électron

1) On considère une distribution volumique de charges de densité volumique ρ uniforme contenue dans une sphère. On note Q la charge totale. Déterminer l'expression du champ électrostatique et du potentiel électrostatique en tout point en fonction de Q, R et ε_0.

On utilise les coordonnées sphériques. Tous les plans contenant le point M et O sont des plans de symétrie donc le champ est radial $\vec{E}=E(r,\vartheta,\varphi)\vec{e_r}$. On a invariance pour toutes rotations autour de O de la distribution de charges : $\vec{E}=E(r)\vec{e_r}$
On propose très logiquement une sphère pour la surface de Gauss

- $r>R : \vec{E}(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$
- $r<R : \vec{E}(r)=\frac{Qr}{4\pi R^3\varepsilon_0}\vec{e_r}$

On trouve ensuite les potentiels :

- $r>R : V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}+Cte=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ En prenant un potentiel nul à l'infini
- $r<R : V(r)=-\frac{Qr^2}{8\pi R^3\varepsilon_0}+Cte' \to Cte'=\frac{3Q}{8\pi R\varepsilon_0}$ soit : $V(r)=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{r^2}{3R^2}\right)$

2) On associe à une distribution de charges créant un champ électrostatique $\vec{E}$ une densité volumique d'énergie électrique égale à $\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$. Calculer l'énergie électrostatique U_e de cette distribution en fonction de Q, R et ε_0.

On a donc une énergie électrostatique totale :

$$U_e=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{r>R}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr+\iiint_{r<R}\left(\frac{Qr}{4\pi R^3\varepsilon_0}\right)^2 r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

$$U_e=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\iiint_{r>R}\frac{1}{r^2}\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr+\iiint_{r<R}\frac{r^4}{R^6}\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr\right)$$

$$U_e=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi\left(\iiint_{r>R}\frac{1}{r^2}dr+\iiint_{r<R}\frac{r^4}{R^6}dr\right)$$

$$U_e=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi\left(\left[\frac{-1}{r}\right]_R^\infty+\left[\frac{r^5}{5R^6}\right]_0^R\right)$$

$$U_e=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{5R}\right)$$

$$U_e=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi\left(\frac{6}{5R}\right)=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

3) Einstein a postulé que l'énergie d'une masse m au repos est égale à mc². Calculer alors l'ordre de grandeur du rayon d'un électron en utilisant les questions précédentes. On donne $m_e=9{,}1.10^{-31}kg, e=1{,}6.10^{-19}C, c=3{,}0.10^8 ms^{-1}, \varepsilon_0=8{,}9.10^{-12}SI$

On a donc pour cette charge au repos une identification qui donne alors :

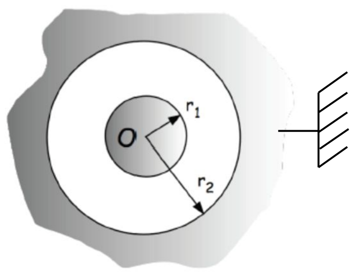
$$\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}=mc^2$$

Soit :

$$R=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 mc^2}\approx 1{,}7fm$$

Activité 3 : Le condensateur cylindrique

Un condensateur est formé de deux cylindres conducteurs très longs (on néglige les effets de bords), d'axe Oz, séparés par un matériau dont la permittivité diélectrique ε_0. Le premier cylindre plein, de rayon r_1, au potentiel $V_1>0$, porte la charge surfacique $\sigma>0$ uniforme; le second, au potentiel $V_2=0$ est creux, de rayon $r_2>r_1$ et relié à la Terre. Les conducteurs sont à l'équilibre.



a) Etude théorique

1) Déterminer le champ électrique entre les deux cylindres.
2) Déterminer la capacité linéique C_l en fonction de ε_0 et des caractéristiques géométriques du condensateur.
3) Donner l'expression de l'énergie électrostatique linéique U_{el} d'un tel système. Que vous évoque ce résultat si l'on introduit la charge linéique Q_l?

$\vec{E} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}\vec{e_r}$. On peut alors trouver la capacité linéique en calculant la circulation pour aller de l'âme à la gaine :

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q_l}{2\pi h\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Donc $C_l = \frac{C}{h} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

On a, par définition, $u_e = \varepsilon_0\frac{E^2}{2}$

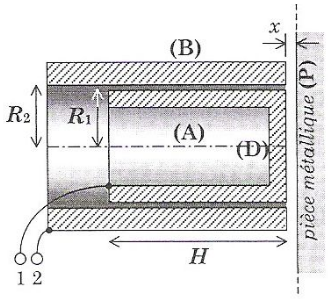
Donc $U_{el} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2 \iiint \frac{dr}{r} d\vartheta dz = \frac{1}{2}\frac{{Q_h}^2}{2\pi h\varepsilon_0} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

$$U_{e,l} = \frac{{Q_l}^2}{2C_l}$$

On retrouve l'équivalent linéique du condensateur plan

b) Application : capteur de proximité

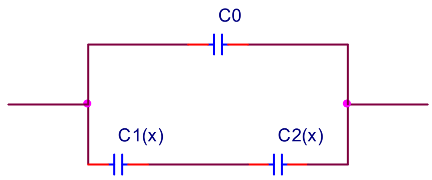
Pour asservir précisément la position d'un appareil de mesure à une distance microscopique d'un objet métallique, ou inversement la position d'une pièce de métal par rapport à un outil fixe, on peut utiliser un capteur capacitif de proximité. La tête de mesure de ce capteur comporte un cylindrique métallique (A) long de H à base circulaire plane (D) de rayon R_1, entouré d'un cylindre métallique coaxial ouvert (B) plus long, de rayon intérieur R_2 dont une extrémité est exactement dans le plan (D).



La pièce métallique plane (P) est parallèle à (D) à une distance x. L'ensemble {(A),(B),(P)} forme une association de trois condensateurs :

- Le condensateur {(A),(B)} de capacité constante C_0
- Le condensateur {(A),(P)} de capacité $C_1(x)$
- Le condensateur {(B),(P)} de capacité $C_2(x)$

1) Représenter le schéma électrique équivalent de l'ensemble {(A),(B),(P)} entre les connexions de mesures 1 et 2. Quelle est l'expression de la capacité électrique C_m du capteur entre 1 et 2 ?



On montre rapidement que $C_m = C_0 + \frac{(C_1C_2)}{(C_1+C_2)}$

2) Exprimer C_0 et $C_1(x)$ en négligeant les effets de bord.

$C_1(x)$ est la capacité d'un condensateur plan : $C_1(x) = \varepsilon_0\frac{\pi R_1^2}{x}$

C_0 est la capacité d'un condensateur cylindrique : $C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}H$

3) Pour faire la mesure de x, on relie la pièce (P) et le cylindre (B) à la masse électrique. Quelle est alors l'expression de la capacité C_m en fonction de x ?

On a donc un condensateur C_2 équivalent à un fil et donc : $C_m = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}H + \varepsilon_0\frac{\pi R_1^2}{x}$

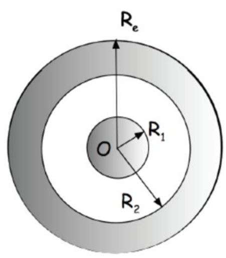
4) Application $R_1 = 5mm;\ R_2 = 6mm; H = 5mm; x = 0{,}1mm;\ \varepsilon_{air} \approx 10^{-11}F.m^{-1}$. Donner la valeur de C_m.

On obtient 8 pF

Activité 4 : Condensateur sphérique

a) Partie théorique

On considère deux conducteurs de géométrie sphérique de même centre O. Le premier est une sphère de rayon R_1 et le second une calotte sphérique de rayon R_2 (bord intérieur) et R_3 (bord extérieur). L'ensemble forme un condensateur sphérique. L'armature interne de rayon R_1 porte une charge Q_1 répartie uniformément en surface et l'armature externe de rayon R_3 est reliée à la Terre (dont le potentiel est supposé nul).



1) Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, le champ entre les armatures.
2) Exprimer la différence de potentiel $V(R_1) -$

$V(R_2)$ en fonction de R_1, R_2 et ε_0.

3) En déduire la capacité du condensateur sachant que $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$.

4) On souhaite obtenir la valeur de la différence de potentiel par une procédure mathématique dite « méthode des rectangles » avec le programme ci-dessous. Préciser les expressions de f, a et b.

```
def rectangle(a,b,f,n):

    S=0
    for i in range (n):
        X1=a+i*(b-a)/n
        X2=a+(i+1)*(b-a)/n
        S=S+f(X1)*(X2-X1)
    return S
```

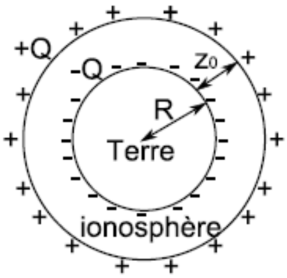
D'après le théorème de Gauss, le champ entre les armatures est donné par : $\oiint E(r) r^2 sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$. Soit $E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

La circulation entre les deux armatures donne : $U = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \approx \frac{Q_1 e}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$ soit : $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}{e}$

$a = R_1$ et $b = R_2$ et $f(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

b) Application :

On représente l'ensemble Terre-ionosphère comme un volumineux condensateur.



La Terre, de rayon R = 6380 km, se comporte comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative -Q (Q > 0) uniformément répartie sur sa surface, tandis que l'ionosphère représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon R + zo, de potentiel V possède une charge totale +Q. On suppose que l'atmosphère possède la permittivité du vide. Des mesures à l'altitude zo = 60 km ont permis d'évaluer le potentiel à environ 360 kV par rapport au potentiel de la Terre.

1) Justifier que le système se comporte comme un condensateur localement plan. Déterminer la valeur numérique de la capacité C.

z0 << R. On retrouve le résultat précédent Application numérique : C = 7,55.10^{-2} F

2) Calculer l'énergie électrostatique U_e du système, ainsi que la valeur du champ E au niveau du sol.

On obtient $U_e = \frac{1}{2}CV^2 = 4{,}32GJ$ et, puisque l'ensemble est équivalent à un condensateur plan, le champ est uniforme et donné par $E = \frac{V}{z_0} = 6V.m^{-1}$

3) Calculer la charge -Q portée par la Terre puis donner la valeur de la densité surfacique de charge à la surface de la Terre.

Puisqu'il s'agit d'un condensateur Q=CV et donc Q=27,2kC et la densité surfacique est donc donnée par $\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2} = -5{,}31 \times 10^{-11} C.m^{-2}$

Rq : En temps normal, l'atmosphère est partiellement ionisée et parcourue par de faibles courants électriques verticaux dont l'effet principal est de décharger le système Terre-atmosphère. Cependant l'activité orageuse et la foudre permettent de maintenir la stabilité du système.

Activité 5 : Sondage par gravimétrie (question ouverte*)

Les phénomènes électrostatiques et gravitationnelles vérifient le principe de superposition et présentent également d'autres d'analogies. On donne le tableau de correspondance suivant :

Effet électrique	Effet gravitationnel
Champ électrique $\vec{E}(M)$ d'une charge ponctuelle q_P: $\vec{E}(M) = \frac{q_P}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$	Champ gravitationnelle $\vec{g}(M)$ d'une masse ponctuelle : $\vec{g}(M) = -G\frac{m_P}{r^2}\vec{u_r}$ Donc : $\begin{cases} q_P \to m_P \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G \end{cases}$
Force électrique s'exerçant sur une charge d'essai q_M : $\vec{f} = q_M\vec{E}(M)$	Force gravitationnelle s'exerçant sur une masse d'essai m_M : $\vec{f} = m_M\vec{g}(M)$
Théorème de Gauss : $\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	Théorème de « Gauss » de la gravitation : $\oiint \vec{g}.d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$
Equation locale : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Avec $[\rho] = C.m^{-3}$	Equation locale : $div\vec{g} = -4\pi G\rho$ Avec $[\rho] = kg.m^{-3}$

La gravimétrie est l'étude et la mesure très fine des variations du champ gravitationnel de la Terre. Cette analyse permet d'apprécier la présence de cavités dans le sol. Cette information est en effet nécessaire lors de la construction de grandes structures (ponts, immeubles, ...). On note $\Delta\vec{g}$ la variation du champ gravitationnel entre la situation sans cavité et la situation avec cavité.

Le gravimètre CG-5 en photo ci-dessous détecte la variation $||\Delta\vec{g}|| = \Delta g$ du champ gravitationnel terrestre suivant sa verticale. Sa sensibilité est de 10μGal (1Gal=1cm.s^{-2})

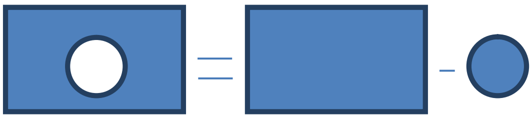
Prévoir si ce gravimètre est capable de détecter la présence d'une cavité sphérique de 10m de diamètre et dont le centre est situé à 10 m de profondeur dans une roche calcaire de masse volumique $\rho = 2500 kg.m^{-3}$. On donne $G \approx 10^{-10} m^3 s^{-2}.kg^{-1}$ et $\pi \approx 3$

S'APPROPRIER :

- $\overrightarrow{g_{theo}}$: champ gravitationnel sans cavité
- $\overrightarrow{g_{vrai}}$: champ gravitationnel avec cavité
- $\overrightarrow{g_{cavit\acute{e}}}$: champ gravitationnel cavité « pleine »
- $\Delta\vec{g} = \overrightarrow{g_{theo}} - \overrightarrow{g_{vrai}}$
- R rayon de la cavité
- h position du centre

STRATEGIE :

On utilise le principe de superposition :



$\overrightarrow{g_{vrai}} = \overrightarrow{g_{theo}} - \overrightarrow{g_{cavit\acute{e}}}$

$$\Delta\vec{g} = \overrightarrow{g_{theo}} - \overrightarrow{g_{vrai}} = \overrightarrow{g_{cavit\acute{e}}}$$

Le champ gravitationnel créé par « la cavité » à la surface de la Terre et à sa verticale est :

$$\overrightarrow{g_{cavit\acute{e}}} = -G\frac{m_{cavit\acute{e}}}{h^2}\overrightarrow{u_z}$$

Donc :

$$\Delta g(m.s^{-2}) = -G\frac{4\pi\rho R^3}{3h^2}$$

$$\Delta g(cm.s^{-2}) = -G\frac{4\pi\rho R^3}{3h^2} \times 100$$

$$\Delta g(\mu Gal) = -G\frac{4\pi\rho R^3}{3h^2} \times 100 \times 10^6 \approx -125\mu Gal$$

Cette cavité est détectable !