

Exercice 0 : Différentielle, dérivée partielle

- 1) Soit la fonction $f(x) = x^2$ démontrer, en remarquant que $df = f(x + dx) - f(x)$, que $f'(x) = 2x$ en négligeant les infiniment petits du second ordre.

$$df = f(x + dx) - f(x) = (x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + dx^2 \approx 2xdx \text{ d'où } f'(x) = 2x$$

- 2) Soit $f(x) = \ln(x)$, rappeler l'expression de $f'(x)$ puis donner l'expression de $d\ln(x)$.

$$\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow d\ln(x) = \frac{dx}{x} \text{ on peut aussi remarquer que } d\ln(x) = \ln(x + dx) - \ln(x) \approx \ln(x) + \frac{dx}{x} - \ln(x) = \frac{dx}{x}$$

- 3) Soient deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$. Exprimer la différentielle $d(uv)$ en utilisant la formule de la dérivée d'un produit de fonctions.

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u \Leftrightarrow d(uv) = vdu + udv$$

$$\text{Donc : } da = cdb + bdc ; \text{ Et } < da^2 > \approx u_a^2 = < cdb + bdc >^2 = < c^2db^2 + b^2dc^2 + 2cbdbdc >$$

$$u_a^2 = c^2 < db^2 > + b^2 < dc^2 > = a^2(u_b^2 + u_c^2)$$

Avec $< dbdc > = 0$ car les variable b et c sont centrées et indépendantes [AM1][AM2]

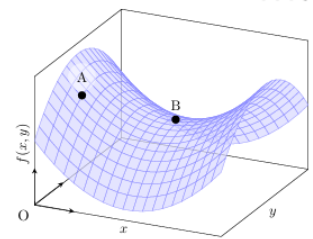
- 4) On considère une fonction f dépendant des deux variables x et y . On représente $f(x, y)$ dans le graphe ci-contre :

- a) Quel est le signe de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A)$?

On a une dérivée négative

- b) Quel est le signe de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A)$?

On a une dérivée positive



- c) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_B, y_B) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_B, y_B) = 0$ quels sont les signes de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_B, y_B)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_B, y_B)$?

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) < 0$$

- 5) Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy$

- a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\text{On a : } \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$$

- b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\text{On a : } \frac{\partial f}{\partial y} = 2x$$

- c) Vérifier que $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$\text{On a : } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2. \text{ Dans ces conditions, on dit que } df \text{ est une différentielle totale exacte}$$

6) Soit $d\psi = 2xydx + 4xydy$ en supposant que $\psi(x, y)$ existe :

a) Calculer $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$

On a $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 2x$

b) Calculer $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$

On a : $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 4y$

c) Cette différentielle est associée à une unique fonction $\psi(x, y)$ si $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$. Est-ce le cas ?

On a ici une forme différentielle et pas une différentielle totale exacte que l'on notera $\delta\psi$.

7) Soit $d\psi = 3x^2ydx + x^3dy$ avec $\psi(x, y)$ une fonction qui existe et que l'on souhaite retrouver :

d) Montrer que $\psi(x, y) = x^3y + K(y)$ avec $K(y)$ une fonction pouvant dépendre, a priori, que de y .

On a $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 3x^2y$ et donc après intégration $\psi(x, y) = x^3y + K(y)$

e) Montrer que $\psi(x, y) = x^3y + C$ où C est une constante.

On a : $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = x^3 = x^3 + K'(y)$ ce qui impose $K(y) = C$

8) On considère un cylindre de rayon R et de hauteur H .

a) Donner l'expression de la surface complète S en fonction de R et H .

On a $S(R, H) = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

b) Donner l'expression du volume V en fonction de R et H

On a $V = \pi R^2 H$

c) Donner l'expression de $S(R, V)$ puis de la différentielle dS

$S(R, V) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$ et donc $dS = \left(4\pi R - \frac{2}{R^2} \right) dR + \frac{2}{R} dV$

d) Un industriel souhaite minimiser ses coûts de production en utilisant le minimum de métal pour une boîte de conserve d'un volume V_0 donné. Comment doit-il choisir R par rapport à H ?

$\frac{\partial S}{\partial R} = 0$ implique $2R = H$



Exercice 1 : Equations d'état

1) Déterminer les coefficients α et χ_T d'un gaz parfait.

Gaz[A3] parfait

Hypothèses

Ce modèle de gaz suppose que les particules sont des quasi-points sans interaction à distance entre elles.

Equation d'état

On a alors :

$$PV = nRT$$

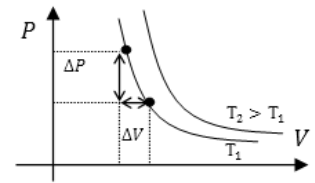
Avec P exprimée en Pa, V en m^3 , T en K, n en mol et R , appelée constante des gaz parfaits en $J.K^{-1}mol^{-1}$ et avec $R = 8,314 J.K^{-1}mol^{-1}$

Avec $\alpha = \frac{1}{T}$ et $\chi_T = \frac{1}{P}$, il est équivalent d'écrire :

$$\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P}$$

- 2) Une série de mesure a permis d'obtenir les courbes ci-contre pour un gaz supposé parfait. Comment estimer les coefficients α et χ_T à partir de ces courbes ?

En mesurant, à T fixée, différents couples (P, V) on peut alors obtenir le tracé d'une isotherme dans un diagramme de Clapeyron et donc obtenir $\chi_T \approx \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P}$ localement. En répétant ce travail pour différentes isothermes, on peut obtenir $\alpha \approx \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T}$ en effectuant une analyse locale.



- 3) Un gaz est réel est mieux décrit par l'équation d'état suivante :

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad \text{[AM4]}$$

- a) Reprendre cette équation en posant d'abord $a = 0$ puis $b = 0$ et interpréter physiquement ce que représente ces termes correctifs [AM5].

On note que si $a = b = 0$ alors on retrouve l'équation d'état des gaz parfait

Si $a = 0$ alors $V = n \frac{RT}{P} + nb$ ce qui rend compte d'un volume minimal occupé par les particules au repos

Si $b = 0$ alors $P = \frac{nRT}{V} - \frac{n^2 a}{V^2}$ ce qui rend compte d'une pression diminuée par l'action attractive des interactions électriques entre particules [AM6].

- b) Exprimer le coefficient χ_T en prenant l'équation d'un gaz réel mais en posant $b = 0$ (modèle de Joule).

Si $b = 0$ alors $P = \frac{nRT}{V} - \frac{n^2 a}{V^2}$ et la différentielle à T constant donne $dP = -\frac{nRT}{V^2} dV + \frac{2n^2 a}{V^3} dV = -\frac{P}{V} dV + \frac{2n^2 a}{V^3} dV$

Soit $\chi_T = \frac{1}{P - \frac{n^2 a}{V^2}}$

- 4) Un solide et un liquide sont peu dilatables et très peu compressibles. Si on cherche à proposer un modèle idéal de ces phases condensées, quelle seraient les valeurs de α et χ_T ? Quelle est l'équation d'état des phases condensée idéales (incompressibles et indilatables) ?

Hypothèses

Une phase condensée idéale [A7] (liquide ou solide) est strictement incompressible et indilatable.

Phase condensée idéale

Equation d'état

$$V(T, P) = nV_m = Cte$$

V_m est le volume molaire

- 5) Donner l'équation d'état $V(T, P)$ à une phase condensée réelle dont les coefficients α et χ_T sont des constantes non nulles.

Phase condensée réelle [AM8]

Hypothèses

Les coefficients thermoélastiques sont des constantes

Equation d'état

On décrit localement la phase au voisinage d'un état de référence V_0, P_0, T_0 :

$$dV = \alpha V dT - \chi_T V dP$$

$$d \ln(V) = \alpha dT - \chi_T dP$$

$$\ln(V) = \alpha T - \chi_T P + Cte$$

$$V(T, P) = V_0 \exp(\alpha \Delta T - \chi_T \Delta P)$$

Et si $\alpha \Delta T - \chi_T \Delta P \ll 1$:

$$\frac{\Delta V}{V_0} \approx \alpha \Delta T - \chi_T \Delta P$$

- 6) On considère la dilatation isobare d'un litre d'eau (phase condensée réelle) dont le coefficient de dilatation isobare est $\alpha = 3 \cdot 10^{-4} K^{-1}$. Déterminer la variation de volume pour une augmentation de température de $50^\circ C$.

On a $\frac{\Delta V}{V_0} \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$ soit 1,5% (15mL), ce qui est petit mais à prendre en considération dans un ballon d'eau chaude qui contient 100L (car il faut « encaisser » 1,5L ce qui nécessite un vase de dilatation)

- 7) On considère la compression isotherme d'un litre d'eau liquide (phase condensée réelle) dont le coefficient de compressibilité isotherme est $\chi_T = 5 \cdot 10^{-10} Pa^{-1}$. Déterminer la variation de pression à imposer pour que le volume puisse varier de 1%.

On a $\frac{\Delta V}{V_0} \approx -10^{-2}$ et donc $\Delta P = 200 bar$ ce qui est énorme, on retrouve ces valeurs de pression dans les vérins hydrauliques

Exercice 2 : Simplifications des conditions d'équilibre

- 1) Comment se simplifie la condition d'équilibre thermo-élastique dans le cas d'un système thermo-élastique contenu dans un réacteur aux parois athermanes ?

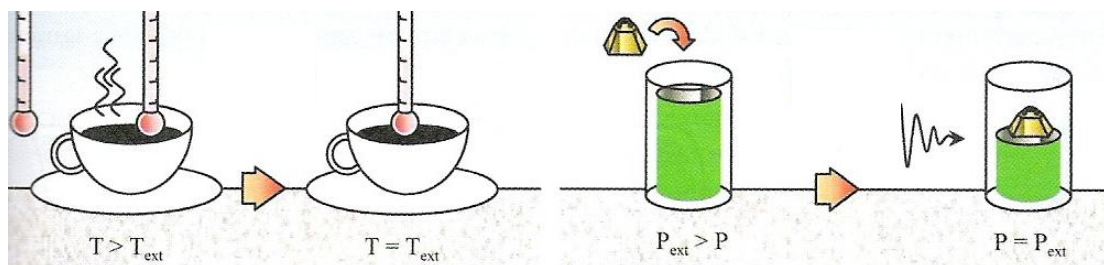
L'équilibre mécanique avec l'extérieur est alors suffisant.

- 2) Comment se simplifie la condition d'équilibre thermo-élastique dans le cas d'un système thermo-élastique contenu dans un réacteur aux parois fixes ?

L'équilibre thermique avec l'extérieur est alors suffisant.

Exercice 3 : Temps de relaxation

- 1) Dans ces deux exemples, quel est le temps de retour à l'équilibre le plus long ?



C'est le temps de retour à l'équilibre thermique τ_{thermo} qui est le plus long dans la plupart des cas par rapport

τ_{meca}

- 2) On effectue une expérience en modifiant la pression extérieure linéairement pendant un temps caractéristique Δt . Le système est caractérisé par son de relaxation mécanique τ_{meca} . Quelle inégalité devons-nous imposer si on veut que cette transformation soit une quasi-suite d'états d'équilibre mécanique ?

Il faut $\tau_{meca} \ll \Delta t$ afin d'observer une succession d'états d'équilibre mécanique.

- 3) Les pistons d'un moteur de voiture oscillent à 6000 tours/min. Pouvons-nous considérer que les compressions et détentes sont suffisamment lentes pour affirmer que ces transformations assurent l'équilibre mécanique du gaz avec l'extérieur ($P \approx P_{ext}$) ?



Il faut comparer deux temps (ou deux vitesses) :

-Le temps Δt que met le piston pour parcourir le cylindre : $\Delta t = \frac{60}{2 \times 6000} = 5 \text{ ms}$

-Le temps $\Delta t'$ qu'une suppression ou onde acoustique met pour parcourir le cylindre : $\Delta t' \approx \frac{0,1}{350} \approx \frac{10^{-3}}{3,5} \approx 300 \mu\text{s}$

On pourra donc souvent considérer que les compressions et détentes rencontrées sont une suite d'équilibre mécanique.

Exercice 4 : Bilan

- 1) Quel type de transformation obtient-on si condition monobare + mécaniquement réversible (avec paroi mobile) ?

La transformation est isobare.

- 2) Quel type de transformation obtient-on si condition monotherme + quasistatique (avec parois diathermanes) :

La transformation est une transformation isotherme.

- 3) Que peut-on affirmer si une transformation est mécaniquement réversible + réacteur calorifugé (équilibre thermique interne et équilibre mécanique avec l'extérieur assurés) ?

La réaction est alors réversible.

- 4) Que peut-on affirmer si une transformation est mécaniquement réversible + transformation isotherme (équilibre thermique et équilibre mécanique avec l'extérieur assurés) ?

La transformation est alors réversible.