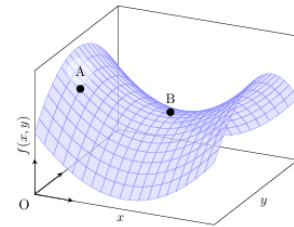


Exercice 0 : Différentielle, dérivée partielle

- 1) Soit la fonction $f(x) = x^2$ démontrer, en remarquant que $df = f(x+x) - f(x)$, que $f'(x) = 2x$ en négligeant les infiniment petits du second ordre.
- 2) Soit $f(x) = \ln(x)$, rappeler l'expression de $f'(x)$ puis donner l'expression de $d\ln(x)$.
- 3) Soient deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$. Exprimer la différentielle $d(uv)$ en utilisant la formule de la dérivée d'un produit de fonctions.

- 4) On considère une fonction f dépendant des deux variables x et y . On représente $f(x, y)$ dans le graphe ci-contre :



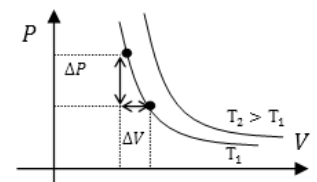
- a) Quel est le signe de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A)$?
 - b) Quel est le signe de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A)$?
- c) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_B, y_B) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_B, y_B) = 0$ quels sont les signes de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_B, y_B)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_B, y_B)$?
- 5) Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy$
 - a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$
 - b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$
 - c) Vérifier que $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$
 - 6) Soit $d\psi = 2xydx + 4xydy$ en supposant que $\psi(x, y)$ existe :
 - a) Calculer $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$
 - b) Calculer $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$
 - c) Cette différentielle est associée à une unique fonction $\psi(x, y)$ si $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$. Est-ce le cas ?
 - 7) Soit $d\psi = 3x^2ydx + x^3dy$ avec $\psi(x, y)$ une fonction qui existe et que l'on souhaite retrouver :
 - d) Montrer que $\psi(x, y) = x^3y + K(y)$ avec $K(y)$ une fonction pouvant dépendre, a priori, que de y .
 - e) Montrer que $\psi(x, y) = x^3y + C$ où C est une constante.
 - 8) On considère un cylindre de rayon R et de hauteur H .
 - a) Donner l'expression de la surface compète S en fonction de R et H .
 - b) Donner l'expression du volume V en fonction de R et H
 - c) Donner l'expression de $S(R, V)$ puis de la différentielle dS
 - d) Un industriel souhaite minimiser ses coûts de production en utilisant le minimum de métal pour une boîte de conserve d'un volume V_0 donné. Comment doit-il choisir R par rapport à H ?



Exercice 1 : Equations d'état

- 1) Déterminer les coefficients α et χ_T d'un gaz parfait.
- 2) Une série de mesure a permis d'obtenir les courbes ci-contre pour un gaz supposé parfait. Comment estimer les coefficients α et χ_T à partir de ces courbes ?
- 3) Un gaz est réel est mieux décrit par l'équation d'état suivante :

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nR$$
 - a) Reprendre cette équation en posant d'abord $a = 0$ puis $b = 0$ et interpréter physiquement ce que représente ces termes correctifs.
 - b) Exprimer le coefficient χ_T en prenant l'équation d'un gaz réel mais en posant $b = 0$ (modèle de Joule).
- 4) Un solide et un liquide sont peu dilatables et très peu compressibles. Si on cherche à proposer un modèle idéal de ces phases condensées, quelle seraient les valeurs de α et χ_T ? Quelle est l'équation d'état des phases condensée idéales (incompressibles et indilatables) ?



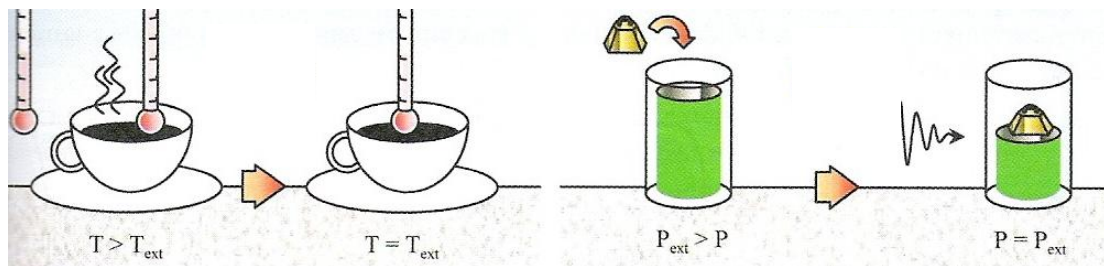
- 5) Donner l'équation d'état $V(T, P)$ à une phase condensée réelle dont les coefficients α et χ_T sont des constantes non nulles.
- 6) On considère la dilatation isobare d'un litre d'eau liquide (phase condensée réelle) dont le coefficient de dilatation isobare est $\alpha = 3.10^{-4} K^{-1}$. Déterminer la variation de volume pour une augmentation de température de $50^\circ C$.
- 7) On considère la compression isotherme d'un litre d'eau liquide (phase condensée réelle) dont le coefficient de compressibilité isotherme est $\chi_T = 5.10^{-10} Pa^{-1}$. Déterminer la variation de pression à imposer pour que le volume puisse varier de 1%.

Exercice 2 : Simplifications des conditions d'équilibre

- 1) Comment se simplifie la condition d'équilibre thermo-élastique dans le cas d'un système thermo-élastique contenu dans un réacteur aux parois athermanes ?
- 2) Comment se simplifie la condition d'équilibre thermo-élastique dans le cas d'un système thermo-élastique contenu dans un réacteur aux parois fixes ?

Exercice 3 : Temps de relaxation

- 1) Dans ces deux exemples, quel est le temps de retour à l'équilibre le plus long ?



- 2) On effectue une expérience en modifiant la pression extérieure linéairement pendant un temps caractéristique Δt . Le système est caractérisé par son temps de relaxation mécanique τ_{meca} . Quelle inégalité devons-nous imposer si on veut que cette transformation soit une quasi-suite d'états d'équilibre mécanique ?
- 3) Les pistons d'un moteur de voiture oscillent à 6000 tours/min. Pouvons-nous considérer que les compressions et détentes sont suffisamment lentes pour affirmer que ces transformations assurent l'équilibre mécanique du gaz avec l'extérieur ($P \approx P_{ext}$) ?



Exercice 4 : Bilan

- 1) Quel type de transformation obtient-on si condition monobare + mécaniquement réversible (avec paroi mobile) ?
- 2) Quel type de transformation obtient-on si condition monotherme + quasistatique (avec parois diathermanes) ?
- 3) Que peut-on affirmer si une transformation est mécaniquement réversible + réacteur calorifugé (équilibre thermique interne et équilibre mécanique avec l'extérieur assurés) ?
- 4) Que peut-on affirmer si une transformation est mécaniquement réversible + transformation isotherme (équilibre thermique et équilibre mécanique avec l'extérieur assurés) ?