

Activité 1 : Surfaces et volumes à connaître

- Après avoir donné les expressions des éléments de surface et de volume adéquats, exprimer le volume des figures géométriques suivantes :
 - Cylindre de rayon R et de hauteur h
 - Sphère de rayon R
- Exprimer également les différentes surfaces pour :
 - Un cylindre de rayon R et de hauteur h
 - Une sphère de rayon R
- On considère une distribution volumique de charges contenue dans un cylindre vertical de rayon R et de hauteur h . On note $\rho(P)$ la densité volumique de charge en un point P du cylindre. Exprimer, en utilisant le système de coordonnées cylindriques, la charge totale Q contenue dans ce cylindre si :
 - Si $\rho(P) = \rho_0 = Cte$
 - Si $\rho(P) = \frac{\rho_0 r}{R}$ où r est la distance radiale depuis l'axe de symétrie de révolution vertical
- On considère une distribution de charges sphérique de rayon R . On note $\rho(P)$ la densité volumique de charge en un point P de la sphère. Exprimer, en utilisant le système de coordonnées sphériques, la charge totale Q contenue dans ce cylindre si :
 - Si $\rho(P) = \rho_0 = Cte$
 - Si $\rho(P) = \frac{\rho_0 r}{R}$ où r est la distance radiale depuis l'axe de symétrie de révolution vertical
- On note V le volume d'une boîte de conserve, de géométrie cylindrique et dont on néglige l'épaisseur du métal qui la constitue. Soient D son diamètre et H sa hauteur. Comment un industriel doit-il choisir D et H afin de minimiser la quantité de métal à utiliser pour un volume V donné ?

1) Pour le cylindre $V = \pi R^2 h$ et pour la sphère $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

2) Pour le cylindre $S = \pi R^2$ ou $S = 2\pi R h$ et pour la sphère $S = 4\pi R^2$

3) $Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho(M) r dr d\theta dz$ soit $Q_{\rho_0} = \rho_0 \pi R^2 h$ et $Q_{\rho_0 \frac{r}{R}} = \frac{\rho_0 2\pi R^2 h}{3}$

4) $Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho(M) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ soit $Q_{\rho_0} = \frac{4\rho_0}{3} \pi R^3$ et $Q_{\rho_0 \frac{r}{R}} = \rho_0 \pi R^3$

5) Il faut chercher à minimiser la surface $S(D, H) = \pi D H + \frac{2\pi D^2}{4}$ de la boîte pour un volume $V = \frac{\pi D^2}{4} H$ donné.

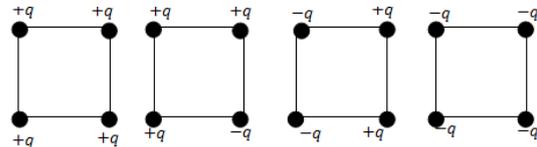
On a donc : $S(D) = \pi D \times \frac{4V}{\pi D^2} + \frac{\pi D^2}{2}$ et donc un minimum

vérifiant $\frac{dS}{dD} = -\frac{4V}{D_{min}^2} + \pi D_{min} = 0$ donc $D_{min} = \left(4\frac{V}{\pi}\right)^{1/3}$ et

$H_{min} = \frac{4V}{\pi D_{min}^2} = \frac{4V}{\pi \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{2/3}} = \left(4\frac{V}{\pi}\right)^{1/3} = D_{min}$

Activité 2 : Propriétés de symétrie

Soient quatre charges sphériques quasi-ponctuelles telles que :

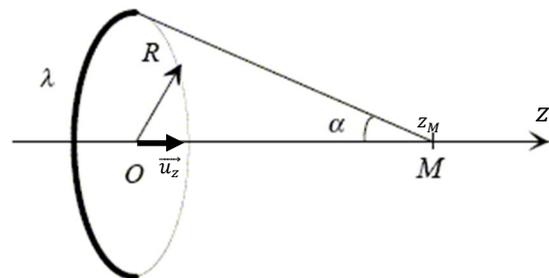


A l'aide d'arguments de symétrie, donner puis représenter le champ électrostatique au centre du carré de diagonale $2a$ dans chaque situation.

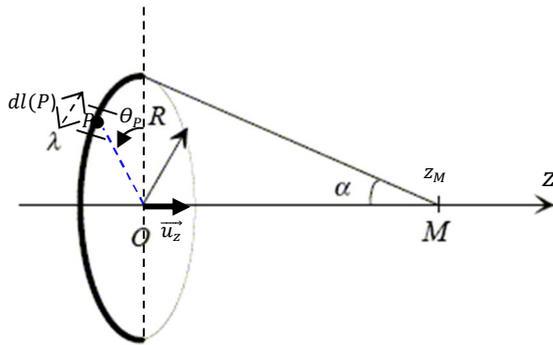
Dans le 1^e et 4^e cas, le champ est nul au centre. Dans le 2^e cas, le champ est sur la diagonale et vaut $\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$. Pour le 3^e cas, la champ est horizontal et vaut $\frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\sqrt{2}}{2}$

Activité 3 : Etude du champ créé par une spire

On considère une spire de rayon R chargée uniformément sur son contour avec une densité linéique de charge λ alors constante. On note Oz l'axe de cette spire et α l'angle sous lequel est vue la spire depuis un point M quelconque de l'axe Oz . On note z_M la cote du point M sur l'axe de la spire



- A l'aide d'arguments de symétrie, donner la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ rayonné au point M par toute la distribution.
- Soit $dl(P)$ un élément de longueur de cette distribution linéique centré autour d'un point P quelconque de la spire chargée. On note θ_p la position angulaire du point P par rapport à une direction verticale de référence.



- Donner l'expression de la charge $dq(P)$ portée par $dl(P)$.
- Représenter sur le graphe précédent $d\vec{E}(M)$ rayonné par $dq(P)$.
- Préciser pourquoi l'intensité du champ électrostatique $E(M)$ rayonnée par toute la distribution D peut être déterminée par le calcul suivant : $E(M) = \int_D d\vec{E}(M) \cdot \vec{u}_z$
- Exprimer le champ électrostatique $E(M)$ en fonction de z_M, λ, R et ϵ_0 (permittivité diélectrique du vide).
- Que dire du champ électrostatique dans le demi espace des $z_M < 0$?

On peut proposer une infinité de plans de symétrie de la distribution contenant alors l'axe Oz et le point M : le champ électrostatique en M est sur l'axe Oz

La projection du champ élémentaire suivant la direction Oz donne : $d\vec{E} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 P M^2} \cos\alpha \vec{e}_z$.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 P M^2} \cos\alpha \vec{e}_z = \frac{\lambda R z_M}{2\epsilon_0 P M^3} \vec{e}_z \\ &= \frac{\lambda R z_M}{2\epsilon_0 (R^2 + z_M^2)^{3/2}} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Le plan contenant la spire est un plan de symétrie, le champ électrostatique est donc également symétrique et $\vec{E}(z_M) = -\vec{E}(-z_M)$

$$\text{Donc : } E(-z_M) \vec{e}_z = -E(z_M) \vec{e}_z$$

Donc $E(-z_M) = -E(z_M)$ fonction impaire

$$E(z) = \frac{\lambda R z_M}{2\epsilon_0 (R^2 + z_M^2)^{3/2}} \text{ pour } z > 0$$

$$E(z) = \frac{\lambda R (z_M)}{2\epsilon_0 (R^2 + z_M^2)^{3/2}} \text{ pour } z < 0$$

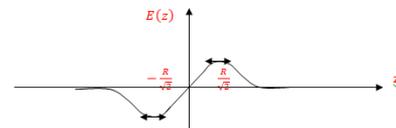
On a donc un champ nul au centre lié à une compensation de tous les éléments de longueur de la spire.

On peut étudier la dérivée de la fonction à tracer pour $z > 0$:

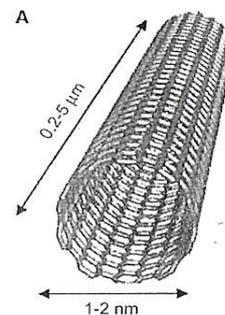
$$\frac{dE(z)}{dz} = \frac{\lambda R (R^2 + z^2)^{1/2}}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^3} (R^2 - 2z^2)$$

Cette fonction s'annule pour $z_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$ et est donc positive pour $|z| < \frac{R}{\sqrt{2}}$

z	0	$z_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$	∞
$\frac{dE(z)}{dz}$	+	0	-
$E(z)$			

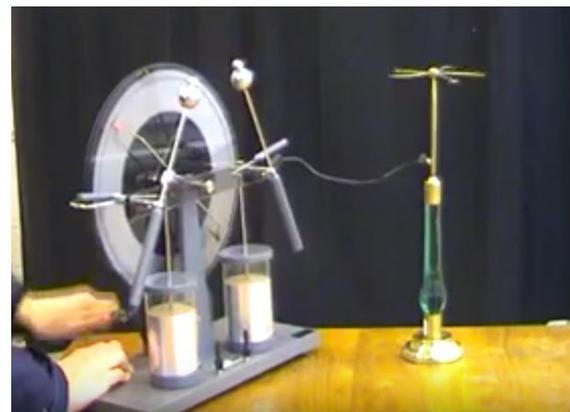


- Application : A l'aide du résultat précédent, expliquer l'utilisation actuelle de nanotubes de carbone afin de générer des champs électriques.



Le résultat précédent met en évidence le pouvoir des pointe (par la dépendance en $\frac{1}{R^2}$). Un rayon faible et un logue structure (principe de superposition) permettent de générer de forts champs électriques.

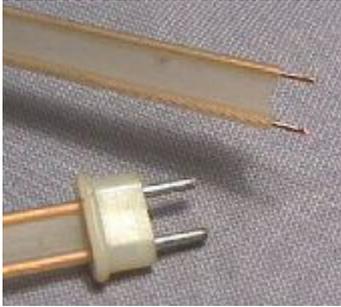
- Interpréter l'expérience du tourniquet électrique.



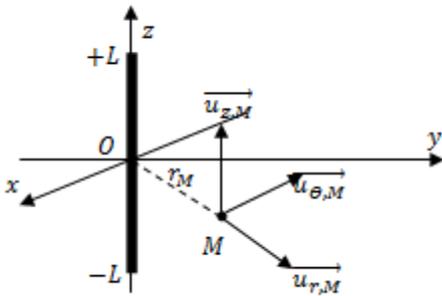
La distribution de charges rayonne un champ électrique qui ionise les molécules d'air environnantes : ces dernières se chargent du même signe que la distribution. Par principe des actions réciproques le tourniquet est mis en mouvement

Activité 4 : Etude d'une ligne bifilaire

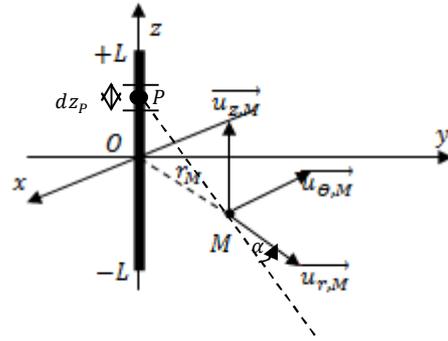
Un câble de liaison Hi-Fi, un cordon d'alimentation secteur sont des exemples de lignes bifilaires. La connaissance de leurs caractéristiques électriques (capacité puis impédance) nécessite d'étudier dans un premier temps le champ électrostatique rayonné par ces fils une fois chargés.



On considère un fil (distribution D) de longueur $2L$ uniformément chargé en longueur avec une densité linéique de charges positives λ . On souhaite connaître le champ créé par cette distribution en un point M appartenant au plan médiateur (xOy) de cette distribution. On note r_M la distance OM et le champ électrostatique sera étudié dans la base cylindrique $(\vec{u}_{r,M}, \vec{u}_{\theta,M}, \vec{u}_{z,M})$.



- 1) A l'aide d'arguments de symétrie, donner la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ rayonné au point M par toute la distribution.
- 2) Soit $dz_p > 0$ un élément de longueur de cette distribution linéique centré autour d'un point P quelconque du fil chargé.



- i) Donner l'expression de la charge $dq(P)$ portée sur dz_p .

Il sera souvent plus simple de décrire une distribution à l'aide d'une variable angulaire (ici α , angle sous lequel est vu le point P depuis le point M). On va donc chercher à trouver la relation liant dz_p à la variation $d\alpha$.

- ii) Montrer que $d \tan \alpha = \frac{dz_p}{\cos^2 \alpha}$ et aussi que $d \tan \alpha = \frac{dz_p}{r_M}$. En déduire l'expression de $dq(P)$ en fonction de $d\alpha$.
- iii) Représenter sur le graphe précédent le champ électrostatique $d\vec{E}(M)$ rayonné par $dq(P)$.
- iv) Que représente la quantité : $(\int_D d\vec{E}(M) \cdot \vec{u}_{r,M}) \cdot \vec{u}_{r,M}$?
- v) Exprimer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en fonction de r_M, λ, L et ϵ_0 (permittivité diélectrique du vide). On cherchera donc à intégrer en fonction de la variable α ($-\alpha_0$ et $+\alpha_0$ sont les angles sous lesquels sont vus les deux extrémités du fil depuis M).

Les plans $(M, \vec{u}_{r,M}, \vec{u}_{z,M})$ et $(M, \vec{u}_{r,M}, \vec{u}_{\theta,M})$ sont des plans de symétrie de la distribution : le champ électrostatique doit appartenir à leur intersection, il est donc radial.

La quantité $d\vec{E}(M) \cdot \vec{u}_{r,M}$ donne la contribution élémentaire de la charge $dq(P)$ au champ total. En le sommant, on obtient rapidement le champ électrostatique total (rayonné par toute la distribution).

En remarquant que $\tan \alpha = \frac{z}{r}$ donc que $d \tan \alpha = \frac{dz}{\cos^2 \alpha} = \frac{dz_p}{r}$ et $\cos \alpha = \frac{r}{PM}$

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \int \frac{\lambda dz}{2\pi\epsilon_0 PM^2} \cos \alpha \vec{e}_r = \int_0^{\alpha_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha d\alpha \vec{e}_r \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \sin \alpha_0 \vec{e}_r \\ \vec{E}(M) &= \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{L^2 + r^2}} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Il est tout à fait possible d'intégrer $\vec{E}(M) =$

$$\int \frac{\lambda dz}{2\pi\epsilon_0 PM^2} \cos\alpha \vec{e}_r = r \int \frac{\lambda dz}{2\pi\epsilon_0 PM^3} \vec{e}_r = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\frac{z}{(r^2+z^2)^{1/2}} \right]_{-L}^L \vec{e}_r = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{L^2+r^2}} \vec{e}_r$$

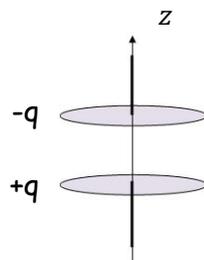
- 3) A l'aide de l'étude précédente, obtenir l'expression du champ électrostatique créé par un fil supposé infini et chargé positivement avec une densité linéique constante λ .

Il suffit de faire tendre L vers l'infini et la distribution créer alors : $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$

- 4) Electrifier une tige en plastique par frottement et expliquer la mise en mouvement d'une boîte de conserve située à proximité.

Activité 5 : Etude d'un réacteur plasma

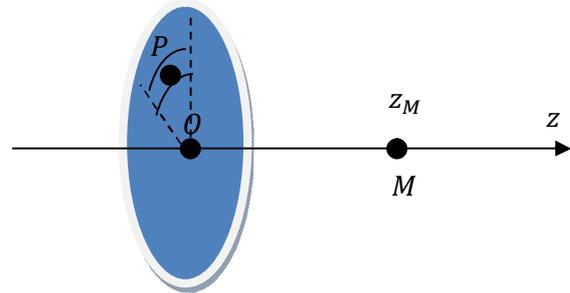
Un plasma est un gaz ionisé sous l'action, par exemple, d'un champ électrostatique. Le réacteur étudié ici est le réacteur PKE utilisé en Allemagne, en Australie mais aussi en France (Orléans). Ce réacteur crée le champ électrostatique à l'aide de deux distributions de charges localisées respectivement sur deux électrodes. L'étude de ces plasmas de laboratoire a permis de maîtriser les processus de fabrication des composants électroniques (transistors MOS par exemple).



L'électrode supérieure porte une charge $-q$ et l'électrode inférieure une charge $+q$. Ces deux électrodes ont la même géométrie : un disque de rayon R . On supposera que la charge totale de chaque face est répartie uniformément avec une densité surfacique $+\sigma$ pour l'électrode inférieure et $-\sigma$ pour l'électrode supérieure.

a) Etude d'une électrode seule :

Considérons l'électrode chargée positivement d'axe Oz et de centre O :



- 1) A l'aide d'arguments de symétrie, donner la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ rayonné en un point M de l'axe Oz par toute la distribution.

On note (r_p, θ_p) le jeu de variables repérant le point P et z_M la variable repérant le point M en repérage cylindrique.

- 2) Soit $dS(P)$ un élément de surface de cette distribution surfacique centré autour d'un point P quelconque.
- Donner l'expression de la charge $dq(P)$ portée par $dS(P)$.
 - Représenter, sur le graphe précédent, le champ $d\vec{E}(M)$ rayonné par $dq(P)$.
 - Exprimer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en fonction de z_M, R, σ et ϵ_0 (permittivité diélectrique du vide). On introduira au cours du calcul l'angle α sous lequel est vu le point P depuis le point M .
 - Donner l'expression du champ électrostatique dans le demi espace des $z_M < 0$?

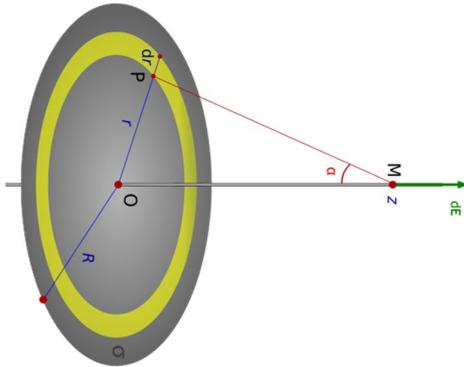
On a une infinité de plan de symétrie de la distribution de charges contenant le point M : leur intersection est selon l'axe Oz . Nous allons alors intégrer la quantité suivante :

$$d\vec{E} \cdot \vec{e}_z = \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \cos\alpha$$

Sachant que : $dr = z \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$ et $\sin\alpha = \frac{r}{PM}$ $\cos\alpha = \frac{z}{PM}$

$$\vec{E} = \int_0^{\alpha_0} \frac{\sigma \sin\alpha d\alpha}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos\alpha]_0^{\alpha_0} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha_0) \vec{e}_z$$

Attention au domaine d'intégration pour l'angle α , le schéma ci-dessous permet de comprendre qu'il faut intégrer de 0 à α_0 (angle sous lequel est vue la bord du disque depuis M) pour intégrer de 0 à R :



$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \vec{e}_z$$

On a un vecteur vrai qui possède les symétries de la distribution qui l'engendre : $\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$

$$\text{Donc : } E(z)\vec{e}_z = -E(-z)\vec{e}_z$$

Donc $E(-z) = -E(z)$ (fonction impaire)

On peut avoir le champ pour $z < 0$ en utilisant les symétries de la distribution :

$$\vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \vec{e}_z$$

- 3) Exprimer le champ créé par un plan infini portant la densité surfacique de charges uniforme σ . Comment ce champ dépend-il de la distance au plan ? Discuter.

Il faut alors faire tendre R vers l'infini :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ pour } z > 0$$

$$\vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ pour } z < 0$$

Le champ est alors constant : c'est le caractère infini du plan qui est responsable d'un champ alors indépendant de z .

b) Etude du réacteur

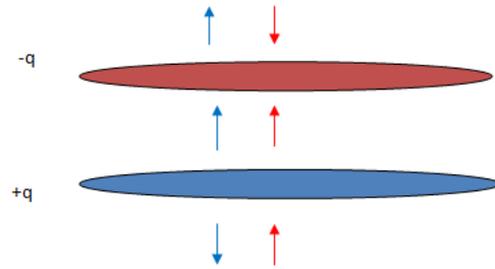
On considère que les deux électrodes sont des plans infinis (hypothèse vraisemblable si l'on considère leurs diamètres bien supérieurs à la distance qui les sépare).

- 1) En vous aidant d'un schéma, donner l'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace.
- 2) Dans quel sens le champ électrostatique est-il dirigé dans le réacteur ?

Dans l'enceinte on a donc un champ égale à :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

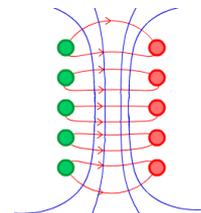
Le champ est alors nul à l'extérieur du réacteur comme le fait comprendre le schéma ci-dessous



Le champ est dirigé de la plaque chargée positivement à la plaque chargée négativement

- 3) Pour cette question, nous allons utiliser une animation java (http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Champs/lignes_champE.php) permettant de réaliser la cartographie des champs \vec{E} et V de distributions de charges simples. On va simuler une plaque chargée à l'aide de 5 charges ponctuelles et identiques mises côte à côte sur une même droite.
- i) Modéliser deux plaques chargées de charge opposée
 - ii) Observer l'allure des lignes de champ électrostatique obtenues. Quelles sont les analogies et différences avec le modèle des plaques infinies ?

On obtient le résultat suivant en utilisant deux rangées de charges ponctuelles :



En dehors d'effet de bords, le champ électrique est bien un maillage de lignes de champ parallèles (ici en rouge)