

TD_sup_enonce

August 26, 2026

1 TD1_sup - code capytal : 02d1-7280221

1.1 Exercice 1 : Exponentiation naïve

Calculer x^n au moyen d'une fonction itérative (boucle for ou while) prenant pour argument x et n

1.2 Exercice 2 : analyse vectorielle

On va travailler en base cartésienne, ainsi deux points A et B de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ seront représentés informatiquement par deux listes $[x_A, y_A]$ et $[x_B, y_B]$.

On va traiter les vecteurs à l'aide de leurs coordonnées en base cartésienne. Par exemple, le vecteur $\vec{AB}$ à deux dimensions est défini par $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et sera traité informatiquement sous la forme d'une liste : $[x_B - x_A, y_B - y_A]$

- 1) Ecrire une fonction produit, qui prend en argument un vecteur $\vec{AB}$ et un coefficient k , et qui renvoie le vecteur $k\vec{AB} = \begin{pmatrix} k(x_B - x_A) \\ k(y_B - y_A) \end{pmatrix}$.
- 2) Ecrire une fonction somme, prenant pour argument deux vecteurs vec1 et vec2, et qui renvoie la somme de ces deux vecteurs.
- 3) Ecrire une fonction scalaire, prenant pour argument deux vecteurs vec1 et vec2, et qui renvoie le produit scalaire entre ces deux vecteurs :

$$\vec{AB} \cdot \vec{A'B'} = AB_x * A'B'_x + AB_y * A'B'_y$$

- 5) Ecrire une fonction opposé qui prend en argument un vecteur et qui calcule son opposé.
- 6) On considère des points A, B, C associés à des masses m_A, m_B, m_C . On définit le barycentre G de ces points par

$$\vec{OG} = \frac{m_A \vec{OA} + m_B \vec{OB} + m_C \vec{OC}}{m_A + m_B + m_C}$$

En utilisant une partie des fonctions précédentes, écrire une fonction qui prend en arguments les points A, B, C et les masses m_A, m_B, m_C associée et qui calcule le vecteur $\vec{OG}$.

- 7) Quel est la barycentre des trois points A, B et C de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_A=0 \\ y_A=0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_B=2 \\ y_B=1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_C=2 \\ y_C=2 \end{pmatrix}$ de masse respective $m_A = 1kg, m_B = 2kg, m_C = 3kg$

1.3 Exercice 3 : Traitement de données numériques

On dispose de notes sous forme d'une liste. Par exemple $[10, 5, 14, 5, 16, 20, 18, 13]$.

- 1) Ecrire une fonction moyenne, qui prend en argument une liste, et qui renvoie la moyenne L_{moy} . Tester votre fonction avec la liste ci-dessus.
- 2) Ecrire une fonction variance, qui prend en argument une liste (d'au moins 2 termes), et qui renvoie la variance de cette liste :

$$V = \frac{\sum_1^n (L_i - L_{moy})^2}{n - 1}$$

- 3) Ecrire une fonction écart-type qui calcule l'écart-type $\sigma = \sqrt{V}$ en prenant une liste L en argument
- 4) Pour apprécier la variabilité de la moyenne, on calcule alors l'écart type par :

$$\sigma(L_{moy}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum_1^n (L_i - L_{moy})^2}{n - 1}}$$

Ecrire un programme qui permet de calculer cette quantité.

1.4 Exercice 4: Estimation de π

Leibnitz a démontré la relation suivante :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i + 1}$$

Ecrire une fonction qui renvoie une liste L dont chaque élément d'indice i donne une estimation de π pour $n = i$

1.5 Exercice 5 : Transposée d'une matrice

La transposée d'une matrice carrée d'ordre 3 s'obtient en échangeant ses lignes et ses colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dans cet exercice une matrice sera représentée par la liste de listes suivante :

[37] : `M1=[[1,2,3],
[4,5,6],
[7,8,9]]`

- 1) Ecrire une fonction prenant pour argument une matrice carré $n*n$ et qui renvoie sa transposée
- Considérons une matrice A de dimension 2×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Sa transposée, notée A^T , est une matrice de dimension 3×2 :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

2) Ecrire une fonction réalisant la transposée d'une matrice $l * c$.

1.6 Exercice 6 : Produit matriciel

On donne le principe du produit matriciel:

Le produit de deux matrices carrées d'ordre 3 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Chaque coefficient c_{ij} est obtenu en multipliant les coefficients de la ligne i de la première matrice par ceux de la colonne j de la seconde matrice, puis en additionnant les produits obtenus :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}.$$

Par exemple, le coefficient c_{11} est obtenu à partir de la première ligne de la première matrice et de la première colonne de la seconde :

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}.$$

Chaque élément c_{ij} du produit matriciel vérifie :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Dans cet exercice, matrice est alors représentée par une liste de liste. Par exemple :

[41] :

```
M1=[[1,2,3],
      [4,5,6],
      [7,8,9]]
```

Ecrire un programme permettant d'effectuer un produit matriciel tel qu'il est présenté ci-dessus :

1.7 Exercice 7: DL de exp(x)

On donne le développement limité de $\exp(x)$:

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

1) Ecrire une fonction factorielle de n qui prend en argument n et qui calcule la factorielle de n .

- 2) Ecrire une fonction qui prend en argument x et n et qui renvoie une liste dont chaque valeur d'indice i correspond à l'estimation de $\exp(x)$ à l'ordre i .