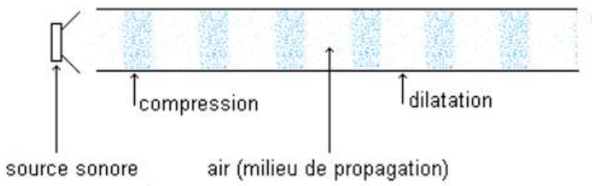
Exercice 1 : Onde acoustique

On travaille avec les hypothèses suivantes pour décrire la propagation d'une onde acoustique dans un tuyau horizontal :

- Les compressions et de détentes des tranches d'air au passage de l'onde sont adiabatiques et mécaniquement réversibles (transformations isentropiques).
- L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M, à la température T_0 avec γ le coefficient isentropique.



- On suppose également que les perturbations apportées par l'onde par rapport à la situation de repos sont faibles. Par exemple, la masse volumique ρ_0 de l'air faiblement perturbée, la pression $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ où P_0 est la pression atmosphérique au repos et $p(x,t) \ll P_0$ est la surpression engendrée par le passage de l'onde.

Avec ces hypothèses, on montre que :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{M}{\gamma R T_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

1) Déterminer l'expression de la vitesse c_0 de propagation de l'onde acoustique dans l'air à la température T_0.

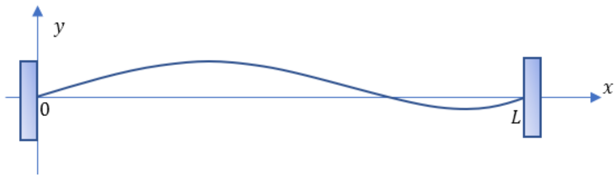
On souhaite apprécier l'influence d'une variation ΔT de la température sur la vitesse de propagation c de l'onde si $\Delta T \ll T_0$.

2) Montrer que $\Delta c \approx \frac{c_0 \Delta T}{2T_0}$
3) Faire une application numérique si $T_0 = 300K, \gamma = 1{,}5, R = 10J.K^{-1}.mol^{-1}, M = 30g.mol^{-1}$ et $\Delta T = 10°C$. On prendra $\sqrt{15} \approx 3{,}8$. Conclure.
4) On suppose que la source sonore vibre à la pulsation ω. Vérifier que l'expression $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$ peut décrire la propagation de l'onde acoustique.

Exercice 2 : Onde sur une corde

On va décrire la vibration d'une corde de masse linéique uniforme μ, sans raideur, de longueur L et fixée à ses deux extrémités en utilisant les hypothèses de travail ci-dessous :

- On néglige toute source de frottement.
- On néglige le poids de chaque élément de longueur de la corde par rapport aux forces de tension.
- On néglige le déplacement horizontal de chaque élément de longueur de la corde par rapport au déplacement vertical $y(x,t)$.



Pour de faibles élongations $y(x,t)$, on démontre alors que : $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$

où $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ et T_0 est la norme de la tension du fil.

1) A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité de v. Que représente cette grandeur ?

On souhaite étudier la propagation d'ondes de la forme : $y(x,t) = Y_0(x)\sin(\omega t)$ où ω est la pulsation de l'onde et $Y_0(x)$ est une fonction que l'on souhaite étudier.

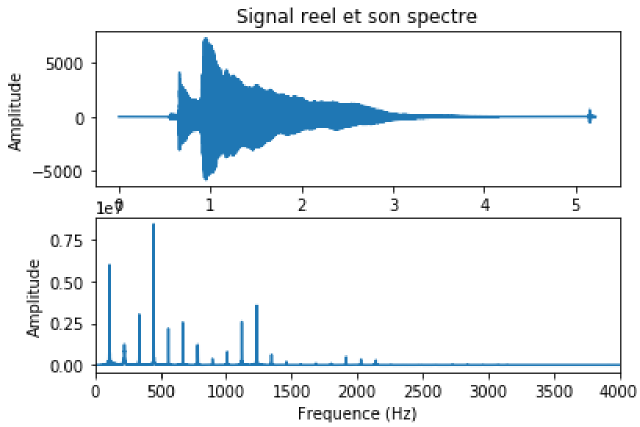
2) Comment qualifie-t-on la solution $y(x,t)$ décrivant une onde pour laquelle les dépendances spatiale x et temporelle t interviennent séparément ?
3) Montrer que $Y_0(x)$ doit vérifier l'équation $\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0$ où $k = \frac{\omega}{v} > 0$.
4) Montrer alors que les ondes recherchées pouvant s'établir sur la corde imposent une quantification des valeurs de k et que la longueur d'onde λ_p associée au mode de vibration de rang p vérifie $\lambda_p = \frac{2L}{p}$ où p est un entier naturel non nul.

Des résultats précédents, on peut affirmer que la vibration d'une corde peut être décrite par une combinaison linéaire des modes propres de vibration définis tels que :

$y_p(x,t) = Y_{0,p} \sin\left(p\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(p\pi \frac{vt}{L} + \varphi_P\right)$

Où $Y_{0,p}$ et φ_P sont des constantes.

5) Expliquer le spectre donné ci-dessous d'une corde de guitare



Exercice 3 : Onde dans un câble coaxial

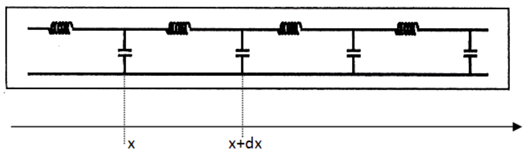
Un câble coaxial est une ligne électrique utilisée, par exemple, pour relier une antenne de réception et un démodulateur connecté à une TV.

Dans le cas de la télévision numérique terrestre, le débit des signaux numériques est de l'ordre 10 Mbit/s sur un câble dont la longueur est typiquement de la dizaine de mètres.

A) Propagation d'un signal sur un câble

1) L'approximation des régimes quasi-stationnaire est-elle encore valable dans ce cadre d'étude ? Justifier.

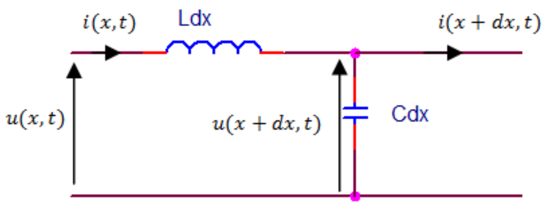
On modélise dans cet exercice un câble coaxial par une série de cellules LC. On notera L l'inductance linéique et C la capacité linéique.



Le constructeur annonce les caractéristiques suivantes :

ELECTRICAL REQUIREMENTS AND TEST METHODS COAX	
Nom. characteristic impedance	
Nominal resistance conductor	32.81 Ω/km
Nominal resistance shield	11.484 Ω/km
Nom. capacitance cond. to shield	53.5 pF/m
Nominal velocity of propagation	83 %

Notre analyse portera dans un premier temps sur le tronçon de longueur élémentaire dx représenté ci-dessous.



On pourra alors effectuer un développement limité à l'ordre 1 et négliger les infiniment petits d'ordre 2 en dx :

$$u(x+dx,t) \approx \left(u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)$$

et $u(x+dx,t)dx \approx \left(u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dx \approx u(x,t)dx$

2) Obtenir les deux équations ci-dessous, notée respectivement (1) et (2), couplant les champs $u(x,t)$ et $i(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -L \dfrac{\partial i}{\partial t} \ (1) \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} = -C \dfrac{\partial u}{\partial t} \ (2) \end{cases}$$

3) Montrer alors que la modélisation retenue pour décrire ce câble aboutit à une équation d'onde de type d'Alembert vérifiée à la fois par $i(x,t)$ et $u(x,t)$.

4) En déduire l'expression de la vitesse v de propagation des signaux électrique dans ce câble.

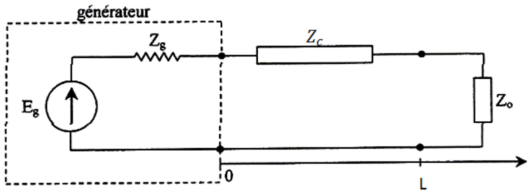
5) En déduire la valeur de l'inductance linéique L du câble.

6) Soit $i(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ une onde de courant se propageant sur la ligne (avec f une fonction traduisant la forme de l'onde). A l'aide des

équations (1) ou (2) donner, puis calculer l'impédance $Z_c = \frac{u(x,t)}{i(x,t)}$ de ce câble.

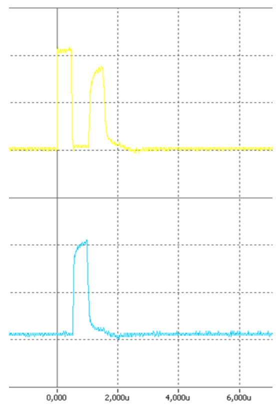
B) Réflexion d'un signal sur une charge

L'antenne de réception sera assimilée à un générateur de Thévenin et la ligne de longueur L se ferme sur le démodulateur assimilable à une impédance Z_0.

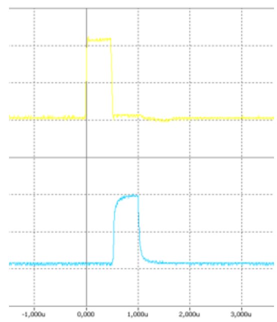


De manière générale, on observe une tension réfléchie $u_r(L,t)$ qui se superpose à la tension incidente $u_i(L,t)$ sur la ligne.

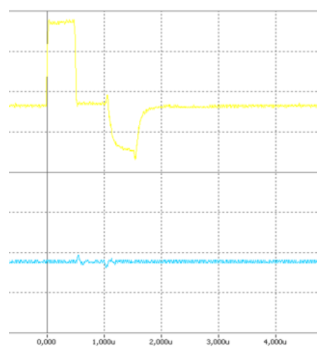
1) Exprimer $u_r(x,t)$ en fonction du courant réfléchi $i_r(x,t)$
2) Exprimer le coefficient de réflexion en tension $r = \frac{u_r(L,t)}{u_i(L,t)}$ en fonction de Z_c et Z_0
3) Pour tester un câble de 100m, un technicien installe une alimentation en $x = 0$ et la charge Z_0 en $x = L$. L'alimentation délivre un pulse unique de 5V émis pendant 0,5μs. Il mesure la tension en $x = 0$ et en $x = L$ à l'aide d'un oscilloscope. Identifier le graphe pour lequel $Z_0 = Z_c, Z_0 \gg Z_c$ et $Z_0 << Z_c$:



Graphe 1 (base de temps en µs)



Graphe 2 (base de temps en µs)



Graphe 3 (base de temps en µs)

C) Aspects énergétiques

On considère la propagation d'une onde de courant $i(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ et de l'onde de tension associée $u(x,t)$ sur un câble coaxial se terminant sur une charge parfaitement adaptée.

1) Soit e_l la densité linéique d'énergie électromagnétique. Faire un bilan local d'énergie et exprimer $\frac{\partial e_l}{\partial t}$ en fonction de $u(x,t)$ et $i(x,t)$
2) Montrer alors que $e_l = \left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu^2\right)$ et interpréter cette expression.
3) Si $i(x,t) = I_0 cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$, montrer que la densité moyenne d'énergie magnétique est égale à la densité moyenne d'énergie électrique. Proposer une analogie mécanique.