Exercice 0 : Tracer l'allure des lignes de champ des champ suivants

Exemple	Représentation
Ecoulement uniforme Le champ des vitesses est le même en tout point $\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_z} \end{matrix}$	
Ecoulement radial à symétrie cylindrique En cylindrique, un tel écoulement vérifie : $\vec{v}(M) = v_r(r)\overrightarrow{u_r}$ Il est invariant par rotation autour de l'axe Oz et par translation suivant l'axe Oz $\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} \frac{K}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{u_z} \end{matrix}$ Si $K > 0$ on parle de source, si $K < 0$ de puit	
Ecoulement orthoradial à symétrie cylindrique En cylindrique, un tel écoulement vérifie : $\vec{v}(M) = v_\theta(r)\overrightarrow{u_\theta}$ Il est invariant par rotation autour de l'axe Oz et par translation suivant l'axe Oz $\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{u_\varphi} \end{matrix}$ Ce type d'écoulement est qualifié de vortex	

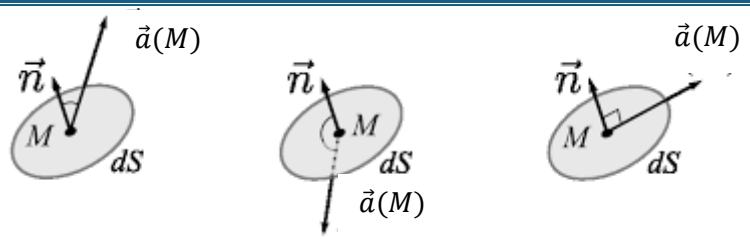
Exercice 1 :

Parmi les figures suivantes, lesquelles sont des surfaces ouvertes et des surfaces fermées :

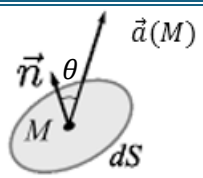
Surface plane délimitée par un carré	
Surface plane délimitée par un rectangle	
Surface délimitée par un cylindre	
Sphère délimitée par une sphère	
Surface plane délimitée par un cercle	

Exercice 2 :

i) Prévoir le signe des différents flux des cas présentés ci-dessous :

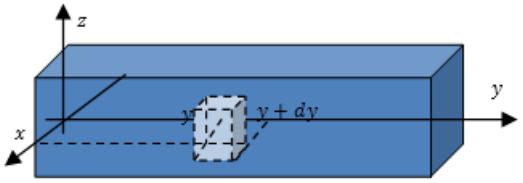


ii) Donner l'expression du flux d'un champ de vecteur $\vec{a}$ uniforme sur la surface S :



Exercice 3 :

Soient un champ de vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_y(x,y,z) \\ 0 \end{pmatrix}$ et un élément de volume $dV = dxdydz$.



i) Déterminer le flux rentrant élémentaire $d\phi_e$ à travers la surface $d\vec{S} = -dxdz\overrightarrow{u_y}$ à la côte y

ii) Déterminer le flux rentrant élémentaire $d\phi_s$ à travers la surface $d\vec{S} = dxdz\overrightarrow{u_y}$ à la côte $y + dy$

iii) En déduire l'expression du bilan de flux élémentaire à travers les surfaces délimitant dV

iv) Que devient ce bilan de flux élémentaire dans le cas général ?

v) Afin d'alléger l'écriture, on introduit l'opérateur de divergence par : $d\phi = \sum_i d\phi_i = \sum_i \vec{a}.\overrightarrow{dS_{ext}} = div\vec{a}dV$

Exercice 4 : Pour les trois champs de vecteurs $\vec{a}$ proposés

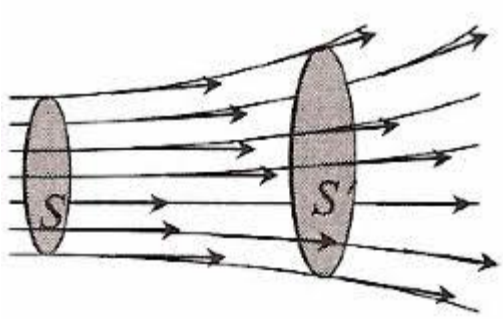
- Prévoir qualitativement (par un bilan de flux) si $div\vec{a}$ est nul, positif ou négatif
- A l'aide des formules définissant la divergence :
  - En coordonnées cartésiennes : $div\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
  - En coordonnées cylindriques : $div\vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
  - En coordonnées sphériques : $div\vec{a}(M) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2 a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{rsin\vartheta}\frac{\partial a_\vartheta sin\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{rsin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$

	Allure de quelques lignes de champ	Analyse qualitative de la divergence à partir de $d\phi = div\vec{a}dV$	Valeur exacte de la divergence

Champ uniforme $\vec{a} = 2\overrightarrow{e_x}$			
Champ non uniforme : $\vec{a} = 2x\overrightarrow{e_x}$			
Vortex (en cylindrique) : $\vec{a} = \frac{2}{r}\overrightarrow{e_\theta}$			

Exercice 5 : champ à flux conservatif

Soit un champ de vecteur $\vec{a}$ dont on représente un tube de champ ci-dessous. On note a_m le champ moyen sur la surface S et $a_m{}'$ le champ moyen sur la surface S'.

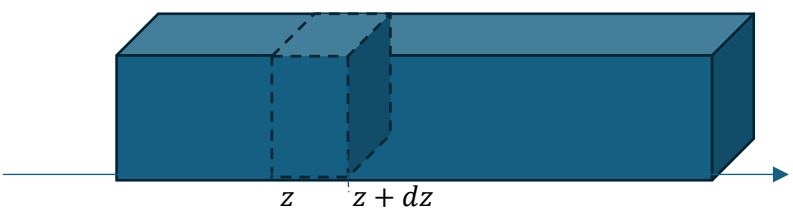


i) Donner une relation entre a_m, S, a'_m et S' si $div\vec{a} = 0$.

ii) Que dire de l'intensité du champ si le tube de champ s'évase ou se contracte

Exercice 6 : Ecoulement incompressible

i) On considère un écoulement axial $\vec{v} = v_z(x,y,z,t)\overrightarrow{u_z}$ dans une conduite rectangulaire. A t, la particule de fluide (système fermé) étudiée à un volume $dV = dxdydz$. Estimer le volume dV'de cette particule à l'instant $t + dt$.



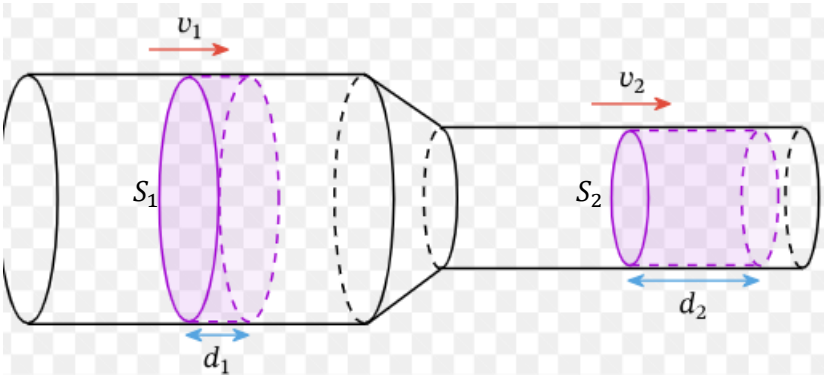
ii) En déduire alors que $div\vec{v}dt = \frac{dV'-dV}{dV}$ et interpréter ce résultat

iii) Une particule de fluide étant un système de masse constante, que peut-on dire d'un écoulement dont le champ des vitesses est à flux conservatif c'est-à-dire $div\vec{v} = 0$

Exercice 7 :

i) L'écoulement suivant est-il incompressible $v = kx\overrightarrow{u_x} + ky\overrightarrow{u_y}$?

ii) On considère un écoulement incompressible dans une conduite de section variable. On note v_{m1} la vitesse débitante au niveau de la section S_1 et v_{m2} la vitesse débitante au niveau de la section S_2. Donner une relation entre ces paramètres à un instant .



iii) Que devient la relation précédente si l'écoulement est incompressible et stationnaire ?