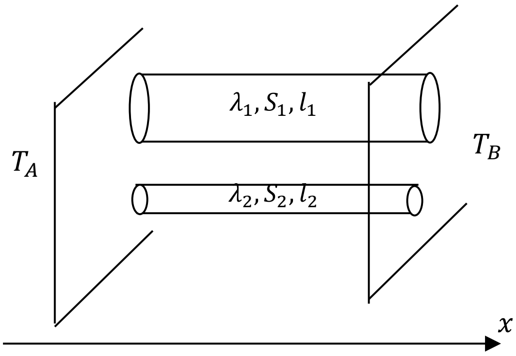
Conduction thermique seule

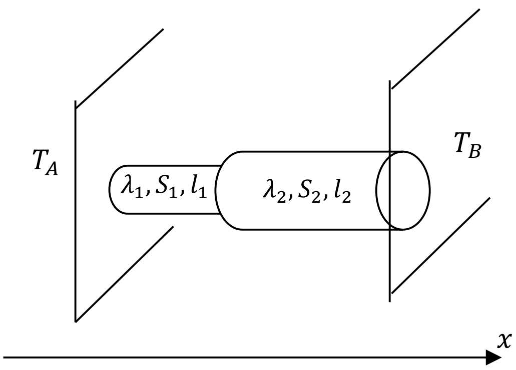
Activité 1 : Lois d'association des résistances

Soient deux matériaux thermostatés aux températures T_A et $T_B < T_A$ reliés par deux cylindres dont les conductivités thermiques, surfaces et longueurs respectives sont notées $\lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2, l_1$ et $l_2 = l_1$. Deux situations sont envisagées :

1e situation :

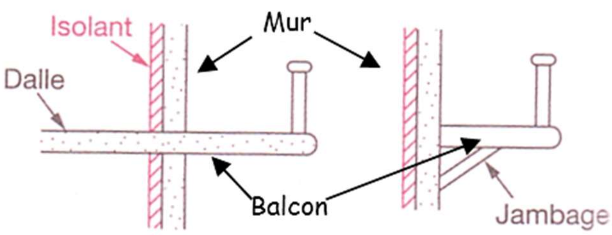


2e situation :



Pour les deux situations, on envisage un régime stationnaire et la conduction thermique est le seul transfert thermique à envisager. La conduction thermique est unidirectionnelle et unidimensionnelle et le vecteur densité de flux thermique est tel que : $\vec{j} = j(x)\overrightarrow{u_x}$.

1) Proposer une analogie électrique des deux situations ci-dessus.
2) Donner des exemples concrets pour lesquels se rencontrent ces deux situations.
3) Exprimer, après démonstration, la résistance thermique équivalente pour les deux situations.
4) On envisage l'installation d'un balcon sur une maison. Quelle est la meilleure des deux solutions présentées ci-dessous ?



Activité 2 : Simple et double vitrage

On considère une pièce à la température $T_i = 20°C$. La température extérieure est $T_e = 5°C$. La conduction thermique est le seul transfert thermique à envisager, le régime est stationnaire et on néglige les effets de bords (flux unidirectionnel et unidimensionnel).

- Simple vitrage

On étudie le transfert thermique à travers une vitre en verre de conductivité thermique $\lambda_v = 1W.m^{-1}.K^{-1}$, de largeur 50cm, de longueur 60cm et d'épaisseur 3mm.

1) Calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire la puissance thermique perdue.

- Double vitrage

On remplace le simple vitrage par un double vitrage constitué de deux vitres (identiques à la précédente) renfermant une couche d'air de conductivité thermique $\lambda_{air} = 0{,}02W.m^{-1}.K^{-1}$, d'épaisseur 30mm.

2) Calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire la puissance thermique perdue. Conclure.

- Double vitrage avec lame d'Argon basse pression

On conserve le double vitrage précédent en remplaçant la couche d'air par un gaz d'argon ${}^{40}_{18}Ar$ basse pression dont la conductivité associée est $\lambda_{Ar} = 0{,}01W.m^{-1}.K^{-1}$.

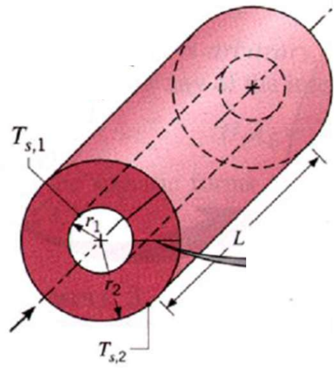
3) A quelle famille du tableau périodique appartient l'argon. Donner la composition de son noyau. Donner également sa configuration électronique.
4) Calculer la puissance perdue. Conclure.

Activité 3 : Résistance thermique entre deux cylindres coaxiaux

On considère un matériau conducteur compris entre deux cylindres coaxiaux, de rayon r_1 et $r_2 > r_1$, de conductivité λ et de longueur L suffisamment grande pour pouvoir négliger les effets de bords. Dans toute la suite, on se place en régime stationnaire. La conduction thermique est le seul transfert thermique à envisager.

a) Calcul de la conductivité thermique linéique

Dans ce paragraphe, nous supposerons que les températures des parois de ce matériau sont maintenues constantes : température $T_{S,1}$ pour $r = r_1$ et température $T_{S,2}$ pour $r = r_2$.



On travaillera dans un repérage cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z}$ confondu avec l'axe du cylindre. Dans ces conditions, le vecteur densité de flux thermique est tel que $\vec{j} = j(r)\overrightarrow{u_r}$.

1) Donner l'expression de la résistance thermique R_{th} associée à ce cylindre en fonction de λ, r_1, r_2 et L.
2) Montrer que la puissance linéique $P_{th,l}$ échangée par le cylindre avec l'extérieur est donnée par :
$$P_{th,l} = -G_{th,l}(T_{s,1} - T_{s,2})$$
Où $G_{th,l}$ est la conductance linéique à exprimer en fonction des données du sujet.

b) Applications

Le dispositif précédent est utilisé en Island afin de transporter l'eau chaude des geysers vers la capitale (constituant ainsi une source d'eau chaude utilisable).

Conduite islandaise permettant le cheminement des eaux chaudes des geysers

Nous supposerons que la température T de l'eau est uniforme sur chaque section droite de la canalisation (pour $r \leq r_1$), ainsi le champ des températures de l'eau est tel que $T = T(z)$. On a $T(0) = 350K$. On note $T_{ext} = 300K$ la température extérieure. La canalisation est de section constante et horizontale est le siège d'un écoulement stationnaire dont le débit massique est $D_m = 50kg.s^{-1}$. On note $c = 4000J.K^{-1}.kg^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau. On a : $r_2 = 40cm; r_1 = 30cm; \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx \frac{\pi}{10}; \ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0{,}2; \lambda = 0{,}5W.K^{-1}.m^{-1}$

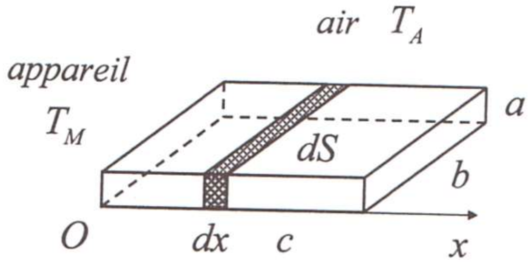
3) Appliquer le 1e principe des systèmes en écoulement entre deux sections droites distantes de dz et montrer que :
$$\frac{dT}{dz} + \frac{T}{\delta} = \frac{T_{ext}}{\delta}$$
On donnera l'expression puis la valeur de δ.
4) Déterminer la distance L pour laquelle la température $T(L) = 340K$.

Conduction thermique et transfert conducto-convectif

Activité 4 : Ailette de refroidissement

Pour éviter un échauffement trop important des appareils électriques, dû à l'effet Joule, on munit l'arrière de leur boitier d'ailettes de refroidissement métalliques.

Dans note cas, chaque ailette est parallélépipédique, d'épaisseur $a = 1mm$, de largeur $b = 10cm$ et de longueur $c = 10cm$. Dans les calculs on admettra que $a \ll b$.



En fonctionnement stationnaire, le boîtier de l'appareil maintient une température $T_M = 60°C$. L'air extérieur est à température constante et uniforme $T_A = 20°C$, sauf au voisinage immédiat de l'ailette, entourée d'une couche limite d'air vérifiant la loi de Newton dont le coefficient de transfert conducto-convectif est $h = 250W.m^{-2}.K^{-1}$. Dans l'ailette, on admet que la conduction thermique est monodimensionnelle et unidirectionnelle suivant Ox, la loi de Fourier s'applique et la conductivité est $\lambda = 50W.m^{-1}.K^{-1}$.

1) Ecrire le bilan en régime stationnaire des échanges thermiques d'une tranche de l'ailette de largeur dx. En déduire que la température $T(x)$ est la solution de l'équation différentielle : $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_A}{\delta^2}$.
2) Interpréter la quantité δ à l'aide d'une analyse dimensionnelle.
3) Calculer δ puis justifier que $T(c) \approx T_A$.
4) Résoudre l'équation différentielle précédente et donner l'expression simplifiée de $T(x)$ en prenant en considération l'inégalité entre δ et c.
5) Exprimer par deux méthodes puis calculer numériquement la puissance thermique totale P évacuée par une ailette.
6) Combien faudrait-il fixer d'ailettes sur le boîtier pour évacuer une puissance totale $P_{tot} = 200W$?

Activité 5 : Echangeur thermique (**)

On considère un tube métallique cylindrique d'axe Oz, de longueur L, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2, de conductivité thermique λ. A l'intérieur de ce tube est contenue de l'eau en écoulement dont la température est $T(z)$.

L'air à l'extérieur de la structure est à température constante T_0. Les échanges thermiques à l'interface eau/paroi intérieure (respectivement paroi extérieur/air) sont modélisés par la loi de Newton avec le coefficient d'échange h_1 (respectivement h_2). On supposera que les échanges thermiques se font uniquement suivant $\overrightarrow{u_r}$ (vecteur unitaire radial). Tous les transferts thermiques sont supposés stationnaires. On donne : $\lambda = 0{,}10W.m^{-1}K^{-1}, h_1 = 50W.m^{-2}K^{-1}, h_2 = 25W.m^{-2}K^{-1}, R_1 = 30cm, R_2 = 40cm$ et $T_0 = 293K$,

1) Déterminer puis calculer la résistance linéique R_L de la canalisation.
2) En appliquant le premier principe des systèmes en écoulement, déterminer la longueur L du tube limitant un refroidissement de 10% de l'eau. Le débit massique est $D_m = 100kg/s$ et la capacité thermique massique de l'eau est $c =$

$4000 J/K/kg$. On négligera les variations d'énergies potentielle et $T(z=0) = 363K$

Activité 6 : Etude expérimentale d'une ailette de refroidissement (acae-1760463)

Equation de la chaleur

Activité 7 : Etude d'une tige calorifugée

Dans la suite, les tableaux devront suivre des opérations matricielles. Voici quelques opérations matricielles courantes sur Python :

```
import numpy as np
tab=np.array([[0,1],[2,3]])
Mat=np.matrix([[0,1],[2,3]])
print (tab*tab)#multiplication élément par élément
print(Mat*Mat)#produit qui suit les règles du calcul matriciel
print(np.asmatrix(tab)*np.asmatrix(tab))#np.asmatrix permet la conversion d'un tableau numpy en matrice
print(np.dot(tab,tab))#produit matricielle imposé aux tableaux numpy
print(np.linalg.inv(tab))#calcul de l'inverse d'une matrice et même d'un tableau
```

Les systèmes d'équations rencontrés seront alors notés $Ax = b$ où A est une matrice carrée, d'ordre n, inversible ou régulière (il existe A^{-1} tel que $AA^{-1} = I \leftrightarrow detA \neq 0$) et b un vecteur colonne de taille n. Pour résoudre de tels systèmes d'équations, on a :

```
print(np.linalg.solve(A,b))# résolve l'équation Ax=b
```

On considère une tige métallique de longueur L, de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique c. Cette tige cylindrique est entièrement calorifugée. On note $T(x,t)$ le champ des températures de cette tige. Initialement, le profil des températures est linéaire :

$$T(x,0) = T_{max} - \frac{(T_{max} - T_{min})}{L} x$$

Cette tige est alors le siège d'un phénomène de conduction thermique unidirectionnel selon son axe Ox.

Dans ces conditions, un bilan thermique dans la tige aboutit à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

A noter que le bilan enthalpique aux extrémités est différent et conduit à :

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0} = \frac{\lambda}{\rho c} \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0,}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right|_{x=L} = -\frac{\lambda}{\rho c} \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}$$

Dans la suite, on prendra $\lambda = 500 W.K^{-1}.m^{-1}, c = 1000 J.K^{-1}.kg^{-1}, L = 1m$, $T_{max} = 60°C$, $T_{min} = 20°C$ et $\rho = 10^4 kg.m^{-3}$.

L'analyse numérique aboutit à discrétiser le temps avec un pas $t_e = 10s$ et l'espace avec un pas $\delta = 10cm$. L'analyse sera effectuée pendant une durée de 10000s (on note $N_t = 1000$ le nombre d'échantillons temporels).

Pour chaque élément de la tige de longueur δ on a une température $T_{x_i}[t_j]$ où $x_i = i\delta$ et $t_j = jt_e$ avec i et j entiers. On note N_x le nombre d'éléments à considérer sur la tige.

1) Ecrire la dérivée partielle $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ selon une formule de différence finie centrée d'ordre 2.
2) Proposer un schéma d'Euler implicite pour résoudre ce problème
3) Obtenir, sur python, un tableau T de dimension (N_x, N_t) décrivant l'évolution spatio-temporelle de la température.
4) Obtenir enfin la représentation temporelle sur un même graphe des températures de chaque cellule.