

Activité 0 : Entraînement au calcul différentiel

- 1) Un moteur voit sa vitesse de rotation $\omega(t)$ vérifier l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = 0$$



- a) Exprimer $\omega(t)$ en sachant que $\omega(0) = \omega_0$
 b) Exprimer la petite variation angulaire $d\theta$ que le rotor de ce moteur balaye pendant l'intervalle de temps dt
 c) En déduire alors le nombre de tours que fait le moteur avant de s'arrêter.
- 2) Un réservoir contient un liquide sur une hauteur $h(t)$. On vidange ce réservoir et on montre que $\frac{dh(t)}{dt} = -K\sqrt{h}$



- a) Quelle est la variation élémentaire de hauteur dh de liquide perdu pendant l'intervalle de temps dt ?
 b) Exprimer le temps de vidange sachant que $h(0) = h_0$
 3) On définit le coefficient de tension superficielle γ comme le travail surfacique mis en jeu pour modifier la surface d'une bulle de rayon R d'une quantité dS par accroissement dR de son rayon : $\delta W = \gamma dS$.



- a) Exprimer δW en fonction de R et dR
 b) δW est aussi donné par $\delta W = (P_{int} - P_{ext})dV$ où dV est la variation élémentaire

du volume de la sphère de la sphère, P_{int} la pression dans la bulle et P_{ext} la pression à l'extérieur de la bulle. Montrer que $(P_{int} - P_{ext}) = \frac{2\gamma}{R}$.

$$1) \quad \omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau} = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow d\theta = \omega(t)dt \rightarrow \Delta\theta = \int_0^\infty \omega_0 e^{-t/\tau} dt$$

$$\Delta\theta = -\left[\tau\omega_0 e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = \tau\omega_0$$

$$\text{Donc le nombre de tout est } \frac{\tau\omega_0}{2\pi}$$

$$2) \quad \frac{dh(t)}{dt} = -K\sqrt{h} \text{ est non linéaire}$$

$$\frac{dh(t)}{\sqrt{h}} = -K dt$$

$$\left[2h^{1/2}\right]_{h_0}^0 = -Kt$$

$$\text{Donc } t = \frac{2}{K} h_0^{1/2}$$

$$3) \quad \delta W = \gamma dS = \gamma 8\pi R dR$$

$$\delta W = \Delta P 4\pi R^2 dR$$

$$(P_{int} - P_{ext}) = \frac{2\gamma}{R}$$

Activité 1 : Modèle du gaz parfaitA) Quelques questions ouvertes :

- 1) Estimer le nombre de moles et la masse d'air présente dans la classe.

$$\text{Avec la loi des gaz parfait } n = \frac{PV}{RT} \approx \frac{10^5 \cdot 120}{8 \cdot 300} \approx 5000 \text{ mol}$$

$$\text{soit } m = nM \approx 5000 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \approx 140 \text{ kg}$$

- 2) Exprimer puis calculer la masse volumique de l'air présent dans la classe ?

$$\text{Avec la loi des gaz parfait } P = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{MV} = \frac{\rho RT}{M} \text{ soit } \rho = \frac{PM}{RT} \approx \frac{10^5 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 300} \approx 1,2 \text{ kg/m}^3$$

- 3) Exprimer puis calculer le volume molaire d'un gaz supposé parfait dans les conditions de température et de pression de la classe.

On obtient un volume molaire de 24,4L/mol

B) Validité du modèle du gaz parfait

- 1) Etablir la relation $P = n^* k_B T$ pour un gaz parfait (avec $k_B = \frac{R}{N_A} \approx 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann). Quelle est, en particules par mm^3 , la densité particulaire n^* des molécules de l'air dans une salle de classe ?

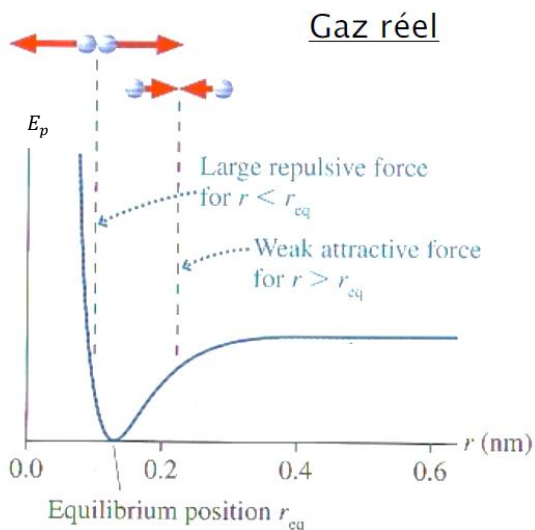
$$\text{On a } PV = nRT \text{ soit } P = \frac{nRT}{V} = \frac{nRT}{N_A V} = \frac{n^* RT}{N_A} = n^* k_B T$$

$$n^* \approx 3.10^{16} \text{mm}^{-3}$$

- 2) En déduire par un modèle simple qui consiste à prêter une organisation périodique des atomes dans l'espace (à la manière d'un cubique simple en cristallographie) la distance typique entre deux molécules.

Soit d la distance moyenne entre deux particules voisines alors N particules occupent un volume V vérifiant $V = Nd^3$ soit $1 = n^*d^3$ et donc $d \approx 3\text{nm}$

- 3) Un gaz présente toujours des interactions entre particules. Le graphe ci-dessous représente le profil de l'énergie potentielle d'interaction $E_p(r)$ en fonction de la distance r entre deux particules (typiquement dans un gaz monoatomique). A partir de quelle valeur du rapport $\frac{T(K)}{P(\text{bar})}$ peut-on utiliser le modèle du gaz parfait ?



Il faut donc $d > 1\text{nm}$

$$\left(\frac{1}{n^*}\right)^{1/3} = \left(\frac{k_B T}{P}\right)^{1/3} > 1\text{nm}$$

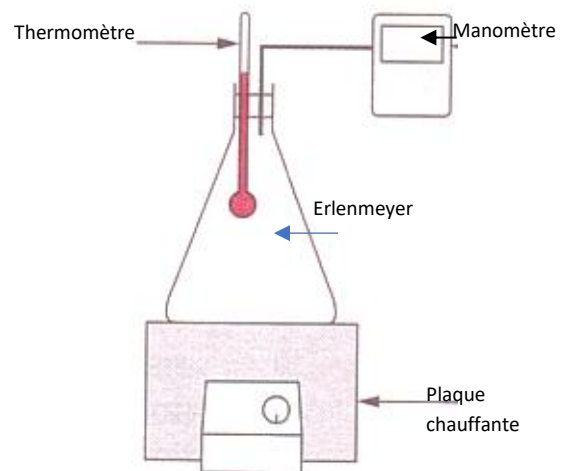
$$\text{Soit } \frac{T(K)}{P(\text{Pa})} > 10^{-4} \quad \frac{T(K)}{P(\text{bar})} > 10^1$$

A noter que dans le cas d'un gaz constitué d'espèces plus complexes (typiquement utilisées dans les machines frigorifiques), il faut prendre une inégalité plus forte $\frac{T(K)}{P(\text{bar})} \gg 10^1$.

C) Etude expérimentale (acf3-1760243)

Le dispositif expérimental ci-dessous permet de faire évoluer la température d'un système gazeux contenu dans un erlenmeyer fermé. Cette transformation est

donc effectuée à volume constant et à nombre de moles constant.



On obtient les résultats suivants :

Température $t(^{\circ}\text{C})$	Pression P (hPa)
20	1010
30	1039
40	1081
50	1116
60	1145
70	1175

- 1) Reporter ce tableau (vertical) de valeurs dans un fichier excel que vous convertirez ensuite en fichier .csv (en utilisant des « ; » comme séparateurs). Ce fichier sera nommé mesures.csv et sera enregistré dans votre dossier Th_chap1_exo1.

Dans la suite, nous allons chercher à effectuer une régression linéaire de ces points expérimentaux afin de tester la loi des gaz parfaits. On supposera que toutes les pressions sont données avec une précision de 10hPa

En physique, il est important de savoir utiliser des fonctions pré-écrites sous python. Il faut pour cela analyser les arguments de ces fonctions et apprécier ce qu'elles retournent. Dans le dossier Th_chap1_exo1 vous trouverez le fichier Th_chap1_exo1.py qui contient trois fonctions.

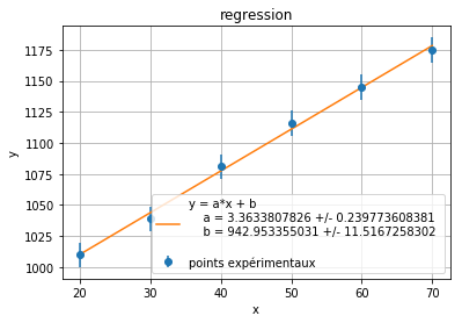
- 2) La fonction tableau_V permet de récupérer les valeurs de deux colonnes du fichier mesures.csv. Utiliser cette fonction afin d'obtenir un tableau des valeurs de pression et un tableau des valeurs de température.

3) Utiliser la fonction RegLin afin d'obtenir une régression linéaire du nuage de points après avoir déclaré un tableau d'incertitude-type pour les pressions. Utiliser cette fonction, obtenir la régression $P(t)$ puis analyser la pertinence de cette régression.

Facultatif : Il est possible d'utiliser la droite précédente comme courbe « étalon » permettant ainsi d'obtenir une évaluation de la température $t_0(^{\circ}\text{C})$ pour laquelle la pression s'annule.

4) Utiliser la fonction etalon afin d'obtenir $t_0(^{\circ}\text{C})$ ainsi que l'incertitude-type associée. Interpréter la valeur obtenue.

```
tab_t, tab_P = tableau_V0
u_p = np.ones(len(tab_t)) * 10
RegLin(tab_t, tab_P, u_p)
```



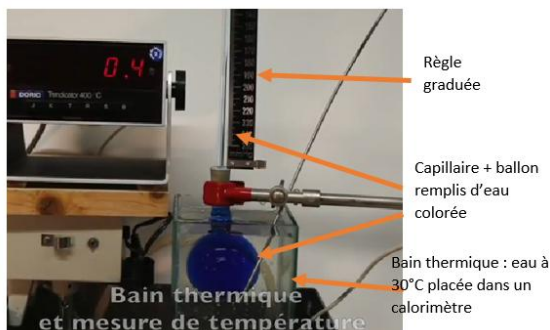
```
print(etalon(3.3, 0.2, 943, 11, 0))
```

On obtient : $t_0(^{\circ}\text{C}) = (-276 \pm 10)^{\circ}\text{C}$

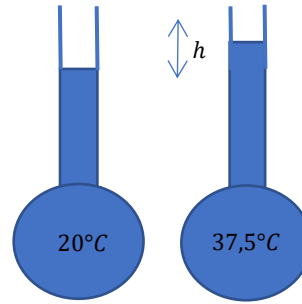
On retrouve le décalage entre échelle des $^{\circ}\text{C}$ et des K.

Activité 2 : dilatation de l'eau

On utilise le dispositif ci-dessous afin d'estimer la valeur supposée constante de α aux alentours de 30°C . Initialement l'eau est à 20°C et au contact du bain marie elle atteint $37,5^{\circ}\text{C}$



Au niveau du capillaire on observe une élévation h du niveau de la surface libre de l'eau colorée :



On a typiquement :

$$V_{\text{ballon}} \approx 0,15\text{L}$$

$$h \approx 3,2\text{cm}$$

$$\Delta T \approx 17,5\text{K}$$

$$S = \pi \times (0,452 \times 10^{-2})^2 / 4$$

a) Quel est l'intérêt du capillaire ?

Avec une petite section on réussit à mieux visualiser la dilatation de l'eau, en effet $V = V_{\text{ballon}} + Sh$ et $\Delta V = Sh$ donc $h = \frac{\Delta V}{S}$

b) Estimer le coefficient de dilatation.

Si on suppose la dilatation négligeable et α constant alors : $\alpha \approx \frac{1}{V_{\text{ballon}}} \frac{hS}{\Delta T}$

$$\alpha \approx 2 \times 10^{-4} \text{K}^{-1}$$

Activité 3 : compressibilité de l'eau (*)

On rappelle :

- Dans toute la suite, on va supposer les océans comme des volumes isothermes à la température T_0 . La masse volumique de l'eau dépendant uniquement de la profondeur z .
- La pression P en fonction de la profondeur z d'eau vérifie $\frac{dP}{dz} = \rho(z)g$ et P_0 est la pression atmosphérique
- Le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T=T_0} \approx 5 \times 10^{-10} \text{Pa}^{-1}$ est supposé uniforme.

1) Montrer que $\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$.

On peut définir le volume massique $v = \frac{V}{m}$. Ainsi :

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial P} = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial P}$$

$\rho = \frac{1}{v}$ donc pour une masse de fluide donnée $dv = -\frac{1}{\rho^2} d\rho$ Donc : $\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$

2) A $T = T_0$, on note $\rho(z = 0) = \rho_0$. Montrer que $\rho(z) = \rho_0 e^{\chi_T(P-P_0)}$

Il s'agit d'intégrer en fonction de P : $\frac{d\rho}{\rho} = d\ln(\rho) = \chi_T dP \rightarrow \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \chi_T(P - P_0) \rightarrow \rho(z) = \rho_0 e^{\chi_T(P-P_0)}$

3) En déduire l'expression de $P(z)$

On a donc $\frac{dP}{dz} = \rho_0 g e^{\chi_T(P-P_0)}$

$$\frac{dP(z)}{e^{\chi_T(P-P_0)}} = \rho_0 g dz$$

$$\left[\frac{e^{-\chi_T(P-P_0)}}{-\chi_T} \right]_{P_0}^{P(z)} = \rho_0 g z$$

$$\frac{e^{-\chi_T(P(z)-P_0)} - 1}{-\chi_T} = \rho_0 g z$$

$$-\chi_T(P - P_0) = \ln(1 - \rho_0 g \chi_T z)$$

$$P(z) = P_0 - \frac{\ln(1 - \rho_0 g \chi_T z)}{\chi_T}$$

4) En déduire que $\rho(z) = \frac{\rho_0}{(1 - \rho_0 g \chi_T z)}$

$$\frac{dP}{dz} = \rho(z) g = \frac{\rho_0 g}{(1 - \rho_0 g \chi_T z)} \rightarrow \rho(z) = \frac{\rho_0}{(1 - \rho_0 g \chi_T z)} = \rho_0 (1 - \rho_0 g \chi_T z)^{-1}$$

5) En déduire la variation relative de la masse volumique au fond d'un océan de 10km de profondeur :

Proposons un DL à l'ordre 1 : $\rho(z) \approx \rho_0 (1 + \rho_0 g \chi_T z)$
donc $\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \rho_0 g \chi_T z = 5 \times 10^{-2} = 5\%$

Alors que la pression est de l'ordre de 1000 bar, l'eau ne voit sa masse volumique varier que de 5% !

Activité 4 : coefficient thermo-élastique d'un gaz réel (*)

Pour modéliser le comportement d'un gaz réel, on utilise l'équation d'état de Van Der Waals :

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

Où a et b sont des termes correctifs constants et positifs et V_m est le volume molaire.

- 1) En remarquant que $d\left[\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b)\right] = d[RT]$, exprimer :
- Le coefficient de dilatation isobare $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$
 - Le coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

Dans la suite, on se place dans la situation pour laquelle $V_m \gg b$, dans ces conditions,

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)V_m \approx RT \rightarrow PV_m = RT - \frac{a}{V_m}$$

On définit l'enthalpie molaire H_m par $H_m = C_{vm}T - \frac{a}{V_m} + U_0 + PV_m$ où C_{vm} (capacité thermique molaire à volume constant) et U_0 sont des constantes

2) Montrer qu'une détente isenthalpique vérifie

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{H_m} = -\frac{\frac{2a}{V_m^2}}{C_{vm} + R} < 0. \text{ Que dire de l'évolution de la température dans le cas d'une détente isenthalpique ?}$$

1) Si on différentie à P constant :

$$d\left[\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b)\right] = PdV_m - \frac{a}{V_m^2}dV_m + 2\frac{ab}{V_m^3}dV_m$$

$$d[RT] = RdT$$

Donc :

$$\frac{\partial V_m}{\partial T} = \frac{R}{P - \frac{a}{V_m^2} + 2\frac{ab}{V_m^3}}$$

$$\alpha = \frac{R/V_m}{P - \frac{a}{V_m^2} + 2\frac{ab}{V_m^3}}$$

On retrouve que si $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow 0$ alors $\frac{\partial V_m}{\partial T} = \frac{R}{P} = \frac{V_m}{T}$

Si on différentie à T constant :

$$\begin{aligned} d\left[\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b)\right] &= PdV_m + V_m dP - b dP - \frac{a}{V_m^2}dV_m \\ &\quad + 2\frac{ab}{V_m^3}dV_m \end{aligned}$$

$$d[RT] = 0$$

$$(V_m - b)dP = \left(\frac{a}{V_m^2} - 2\frac{ab}{V_m^3} - P\right)dV_m$$

Donc : $\frac{\partial V_m}{\partial P} = \frac{V_m - b}{\left(\frac{a}{V_m^2} - 2\frac{ab}{V_m^3} - P\right)}$

On retrouve que si $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow 0$ alors $\frac{\partial V_m}{\partial T} = -\frac{V_m}{P}$

2) Donc : $H_m = C_{vm}T - \frac{a}{V_m} + U_0 + RT - \frac{a}{V_m}$
 $dH_m = (C_{vm} + R)dT + \frac{2a}{V_m^2}dV_m$

Si $dH_m = 0$ alors $\frac{\partial T}{\partial V_m} = -\frac{\frac{2a}{V_m^2}}{C_{pm}} < 0$

Dans le cas d'une détente isenthalpe, $dV > 0$ et donc on observe un refroidissement. Ce type de détente permet donc de refroidir un gaz. Cette détente amenant même à sa liquéfaction dans les machines thermodynamiques

Activité 5 : Problème ouvert

On souhaite construire un thermomètre à alcool dont la résolution est de 1°C avec 0,5cm entre deux graduations.



On assimilera ce thermomètre à dilatation à un cylindre fermé de longueur ℓ constante et de rayon R constant contenant 12g d'éthanol à pression constante. Calculer R . On donne :

- Densité de l'éthanol à 25°C : 0,789
- Coefficient de dilatation isobare : $\alpha = 1,1 \times 10^{-3} \text{K}^{-1}$

Le volume occupé par le fluide est : $V = Sl$

La variation de ce volume est donnée par $dV = Sdl$.

Et, en négligeant l'effet de la pression, on a : $dV \approx V_0 \alpha_0 dT$

Donc : $Sdl = V_0 \alpha_0 dT$

Et, pour des variations « faibles » par rapport à l'état

initial : $S = V_0 \frac{\alpha_0 \Delta T}{\Delta l} = \frac{m}{\rho_0} \frac{\alpha_0 \Delta T}{\Delta l}$

Donc : $R \approx 1,0 \text{mm}$