

Activité 0 : Entraînement au calcul différentiel

- 1) Un moteur voit sa vitesse de rotation $\omega(t)$ vérifier l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = 0$$



- Exprimer $\omega(t)$ en sachant que $\omega(0) = \omega_0$
 - Exprimer la petite variation angulaire $d\theta$ que le rotor de ce moteur balaye pendant l'intervalle de temps dt
 - En déduire alors le nombre de tours que fait le moteur avant de s'arrêter.
- 2) Un réservoir contient un liquide sur une hauteur $h(t)$. On vidange ce réservoir et on montre que $\frac{dh(t)}{dt} = -K\sqrt{h}$



- Quelle est la variation élémentaire de hauteur dh de liquide perdu pendant l'intervalle de temps dt ?
 - Exprimer le temps de vidange sachant que $h(0) = h_0$
- 3) On définit le coefficient de tension superficielle γ comme le travail surfacique mis en jeu pour modifier la surface d'une bulle de rayon R d'une quantité dS par accroissement dR de son rayon : $\delta W = \gamma dS$.



- Exprimer δW en fonction de R et dR
- δW est aussi donné par $\delta W = (P_{int} - P_{ext})dV$ où dV est la variation élémentaire du volume de la sphère de la sphère, P_{int} la pression dans la bulle et P_{ext} la pression à l'extérieur de la bulle. Montrer que $(P_{int} - P_{ext}) = \frac{2\gamma}{R}$.

$$1) \quad \omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau} = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow d\theta = \omega(t)dt \rightarrow \Delta\theta = \int_0^\infty \omega_0 e^{-t/\tau} dt$$

$$\Delta\theta = -\left[\tau\omega_0 e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = \tau\omega_0$$

Donc le nombre de tout est $\frac{\tau\omega_0}{2\pi}$

$$2) \quad \frac{dh(t)}{dt} = -K\sqrt{h} \text{ est non linéaire}$$

$$\frac{dh(t)}{\sqrt{h}} = -Kdt$$

$$\left[2h^{1/2}\right]_{h_0}^0 = -Kt$$

$$\text{Donc } t = \frac{2}{K} h_0^{1/2}$$

$$3) \quad \delta W = \gamma dS = \gamma 8\pi R dR$$

$$\delta W = \Delta P 4\pi R^2 dR$$

$$(P_{int} - P_{ext}) = \frac{2\gamma}{R}$$

Activité 1 : Modèle du gaz parfait

A) Quelques questions ouvertes :

- 1) Estimer le nombre de moles et la masse d'air présente dans la classe.

Avec la loi des gaz parfait $n = \frac{PV}{RT} \approx \frac{10^5 \cdot 120}{8 \cdot 300} \approx 5000 \text{ mol}$ soit $m = nM \approx 5000 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \approx 140 \text{ kg}$

- 2) Exprimer puis calculer la masse volumique de l'air présent dans la classe ?

Avec la loi des gaz parfait $P = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{MV} = \frac{\rho RT}{M}$ soit $\rho = \frac{PM}{RT} \approx \frac{10^5 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 300} \approx 1,2 \text{ kg/m}^3$

- 3) Exprimer puis calculer le volume molaire d'un gaz supposé parfait dans les conditions de température et de pression de la classe.

On obtient un volume molaire de 24,4L/mol

B) Validité du modèle du gaz parfait

- 1) Etablir la relation $P = n^* k_B T$ pour un gaz parfait (avec $k_B = \frac{R}{N_A} \approx 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ la constante de Boltzmann). Quelle est, en particules par mm^3 , la densité particulaire n^* des molécules de l'air dans une salle de classe ?

On a $PV = nRT$ soit $P = \frac{nRT}{V} = \frac{NRT}{N_A V} = \frac{n^* RT}{N_A} = n^* k_B T$

$$n^* \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ mm}^{-3}$$

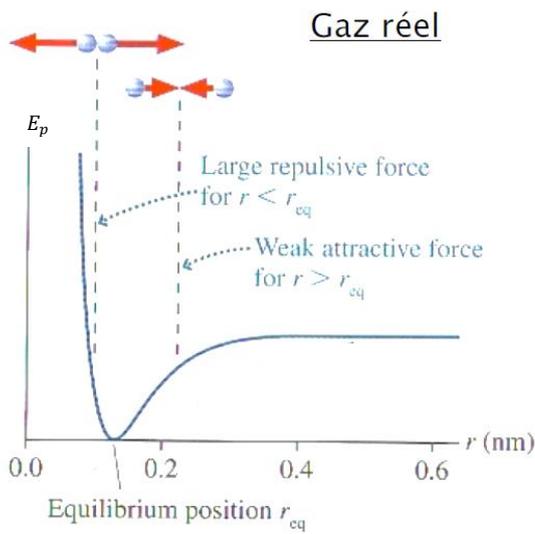
- 2) En déduire par un modèle simple la distance typique entre deux molécules.

Soit d la distance moyenne entre deux particules voisines alors N particules occupent un volume V vérifiant $V = Nd^3$ soit $1 = n^* d^3$ et donc $d \approx 3 \text{ nm}$

- 3) Un gaz présente toujours des interactions entre particules. Le graphe ci-dessous représente le profil de l'énergie potentielle d'interaction $E_p(r)$ en fonction de la distance r entre deux particules (typiquement dans un

gaz monoatomique). A partir de quelle valeur du rapport $\frac{T(K)}{P(bar)}$ peut-on utiliser le modèle du gaz parfait ?

On obtient les résultats suivants :



Température t(°C)	Pression P (hPa)
20	1010
30	1039
40	1081
50	1116
60	1145
70	1175

Il faut donc $d > 1nm$

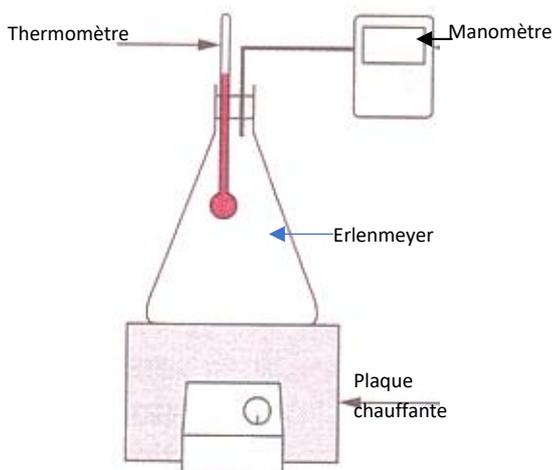
$$\left(\frac{1}{n^*}\right)^{1/3} = \left(\frac{k_B T}{P}\right)^{1/3} > 1nm$$

Soit $\frac{T(K)}{P(Pa)} > 10^{-4} \frac{T(K)}{P(bar)} > 10^1$

A noter que dans le cas d'un gaz constitué d'espèces plus complexes (typiquement utilisées dans les machines frigorifiques), il faut prendre une inégalité plus forte $\frac{T(K)}{P(bar)} \gg 10^1$.

C) Etude expérimentale

Le dispositif expérimental ci-dessous permet de faire évoluer la température d'un système gazeux contenu dans un erlenmeyer fermé. Cette transformation est donc effectuée à volume constant et à nombre de moles constant.



- 1) Reporter ce tableau (vertical) de valeurs dans un fichier excel que vous convertirez ensuite en fichier .csv (en utilisant des « ; » comme séparateurs). Ce fichier sera nommé mesures.csv et sera enregistré dans votre dossier Th_chap1_exo1.

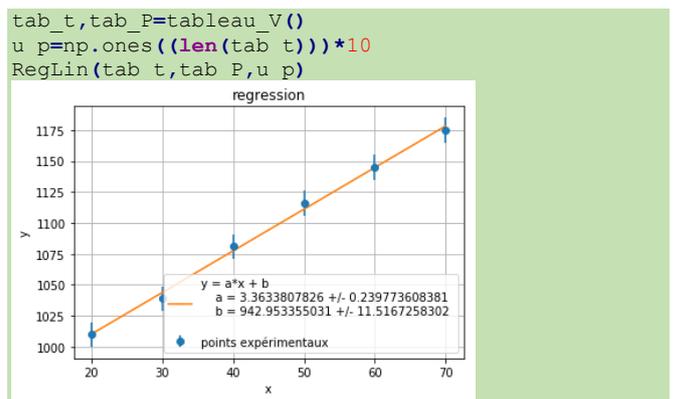
Dans la suite, nous allons chercher à effectuer une régression linéaire de ces points expérimentaux afin de tester la loi des gaz parfaits. On supposera que toutes les pressions sont données avec une précision de 10hPa

En physique, il est important de savoir utiliser des fonctions pré-écrites sous python. Il faut pour cela analyser les arguments de ces fonctions et apprécier ce qu'elles retournent. Dans le dossier Th_chap1_exo1 vous trouverez le fichier Th_chap1_exo1.py qui contient trois fonctions.

- 2) La fonction `tableau_V` permet de récupérer les valeurs de deux colonnes du fichier `mesures.csv`. Utiliser cette fonction afin d'obtenir un tableau des valeurs de pression et un tableau des valeurs de température.
- 3) Utiliser la fonction `RegLin` afin d'obtenir une régression linéaire du nuage de points après avoir déclaré un tableau d'incertitude-type pour les pressions. Utiliser cette fonction, obtenir la régression $P(t)$ puis analyser la pertinence de cette régression.

Facultatif : Il est possible d'utiliser la droite précédente comme courbe « étalon » permettant ainsi d'obtenir une évaluation de la température $t_0(°C)$ pour laquelle la pression s'annule.

- 4) Utiliser la fonction `etalon` afin d'obtenir $t_0(°C)$ ainsi que l'incertitude-type associée. Interpréter la valeur obtenue.



print(etalon(3.3,0.2,943,11,0))

On obtient : $t_0(^{\circ}C) = (-276 \pm 10)^{\circ}C$

On retrouve le décalage entre échelle des $^{\circ}C$ et des K.

Activité 2 : Coefficients thermoélastique

On définit les coefficients positifs thermo-élastiques isobare $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ et isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$

1) Etude du gaz parfait

a) Exprimer ces coefficients dans le cas d'un gaz parfait.

D'après la loi des gaz parfaits : $V = \frac{nRT}{P}$, donc :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{nR}{VP} = \frac{1}{T}$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{nRT}{VP^2} = -\frac{1}{P}$$

b) Calculer les coefficients α et χ_T dans le cas d'un gaz parfait à la pression atmosphérique et à $27^{\circ}C$.

$$\alpha \approx 3.10^{-3} K^{-1}$$

$$\chi_T = 10^{-5} Pa^{-1}$$

c) Un gaz obéit à l'équation du gaz parfait. En utilisant le calcul différentiel, estimer sa variation relative de volume si sa pression augmente de 1% et sa température de 2%.

$$\text{On a } dV = \frac{VdT}{T} - \frac{VdP}{P} = V\alpha dT - V\chi_T dP$$

$$\text{Soit : } \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} \approx \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{\Delta P}{P_0} \approx 1\%$$

Rq 1 : Face à ces faibles variations, nous avons proposés des simplifications tout à fait justifiables :

$$\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \rightarrow d\ln(V) = d\ln(T) - d\ln(P)$$

$$\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{V_0 + \Delta V}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{T_0 + \Delta T}{T_0}\right) + \ln\left(\frac{P_0 + \Delta P}{P_0}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) + \ln\left(1 + \frac{\Delta P}{P_0}\right)$$

$$\text{Avec un DL à l'ordre 1 : } \frac{\Delta V}{V_0} \approx \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{\Delta P}{P_0}$$

Rq2 : On pourra aussi remarquer l'efficacité de la différentielle logarithmique :

$$V = \frac{nRT}{P}$$

$$\ln(V) = \ln(nR) + \ln(T) - \ln(P)$$

$$d\ln(V) = d\ln(T) - d\ln(P)$$

d) Soit un volume V_0 d'un gaz supposé parfait à la température $T_0 = 300K$ et à la pression P_0 . On effectue un chauffage isobare conduisant à une augmentation de température de $10^{\circ}C$. Estimer la valeur de la variation relative du volume $\frac{\Delta V}{V_0}$.

A pression constante, on a : $dV = V\alpha dT = \frac{V}{T} dT$ soit :

$$\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

- En supposant de petites fluctuations :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta T}{T_0} = 3\%$$

- Sans approximation, on a $d\ln\left(\frac{V}{T}\right) = 0$, soit :

$$\frac{V}{T} = Cte = \frac{V_0}{T_0}$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta T}{T_0} = 3\%$$

e) Soit un volume V_0 d'un gaz supposé parfait à la température T_0 et la pression $P_0 = 10^5 Pa$. On effectue une compression isotherme de 0,1bar. Donner la variation relative du volume.

- Avec approximation rapide :

$$\frac{dV}{V} = -\chi_T dP = -\frac{dP}{P}$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{\Delta P}{P_0} \approx -10\%$$

- Sans approximation

$$d\ln(PV) = 0$$

$$PV = P_0 V_0$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{\Delta P}{P} = -\frac{\Delta P}{P_0 + \Delta P} \approx -9\%$$

2) Etude d'une phase condensée

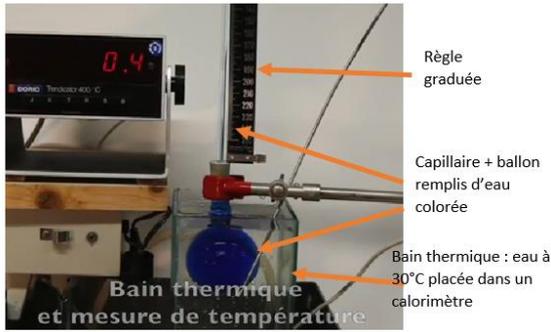
L'eau liquide à $27^{\circ}C$, sous 1 bar, a un coefficient de compressibilité isotherme de $\chi_T = 5.10^{-10} Pa^{-1}$ et un coefficient de dilatation isobare de $\alpha = 3.10^{-4} K^{-1}$.

a) Comparer ces valeurs à celles calculées à la question précédente dans le cas d'un gaz parfait.

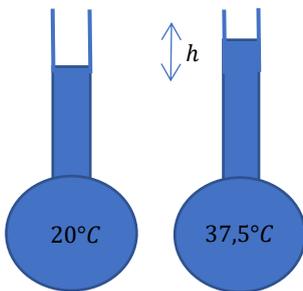
$\frac{\chi_{Teau}}{\chi_{Tair}} = 5.10^{-5}$ L'eau liquide est donc nettement moins compressible que l'air.

L'eau se dilate un peu sous l'effet de la température, mais plus faiblement (10 fois moins qu'un gaz).

On utilise le dispositif ci-dessous afin d'estimer la valeur supposée constante de α aux alentours de $30^{\circ}C$. Initialement l'eau est à $20^{\circ}C$ et au contact du bain marie elle atteint $37,5^{\circ}C$



Au niveau du capillaire on observe une élévation h du niveau de la surface libre de l'eau colorée :



On a typiquement :

$$V_{ballon} \approx 0,15L$$

$$h \approx 3,2cm$$

$$\Delta T \approx 17,5K$$

$$S = \pi \times (0,452 \times 10^{-2})^2$$

b) Quel est l'intérêt du capillaire ?

Avec une petite section on réussit à mieux visualiser la dilatation de l'eau, en effet $V = V_{ballon} + Sh$ et $\Delta V = Sh$ donc $h = \frac{\Delta V}{S}$

c) Estimer le coefficient de dilatation.

Si on suppose la dilatation négligeable et α constant alors : $\alpha \approx$

$$\frac{1}{V_{ballon}} \frac{hS}{\Delta T}$$

$$\alpha \approx 8 \times 10^{-4} K^{-1}$$

d) Estimer la variation de pression ΔP nécessaire pour créer, dans le cas de l'eau à une température de 27°C constante, une variation relative du volume $\frac{\Delta V}{V_0}$ de 10% (on supposera χ_T constant). Conclure.

A partir de l'équation d'état :

$$\frac{dV}{V} = -\chi_T dP$$

Soit $V = V_0 e^{-\chi_T \Delta P}$ et donc $\frac{\Delta V}{V_0} = 1 - e^{-\chi_T \Delta P}$

- Sans approximation : $\Delta P = \frac{-\ln(1 - \frac{\Delta V}{V_0})}{\chi_T} \approx 2100bar$

- Avec approximation : $-\frac{\Delta V}{\chi_T V} = \Delta P = 2000bar$

Soit $\Delta P_{eau} = 2000bar$ et $\Delta P_{gaz} = 0,1bar$ pour 10% de variation en volume. Une forte variation de pression ne fait pas varier de manière notable le volume d'une phase condensée !

La dilatation de l'ordre du % de l'eau liquide nécessite une variation de température de l'ordre de 30°C pour l'eau liquide alors qu'elle ne nécessite que 3°C pour un gaz à température ambiante

Le modèle de la phase condensée idéale (incompressible et indilatable) est donc tout à fait pertinent !

Activité 3 : Définitions

Justifier, de manière simple, concise et précise vos réponses aux questions suivantes :

1) Un système fermé est-il nécessairement isolé ?

Non, des échanges d'énergie sont incompatibles avec la définition d'un système isolé

2) Un système isolé est-il nécessairement fermé ?

Oui avec en plus aucun transfert énergétique.

3) Un système ayant une température et une pression uniforme dans un réacteur thermomécanique est-il en équilibre ?

Pas obligatoirement, des parois diathermanes et ou mobiles impliquent un équilibre thermomécanique avec l'extérieur en plus de l'équilibre interne

4) Une transformation quasistatique est-elle réversible ?

Non, il faut également éviter toute source de frottement solide dans le cas de nos réacteurs thermomécaniques.

5) Une transformation réversible est-elle quasistatique ?

Oui et dépourvue de frottement

6) Une transformation mécaniquement réversible et isotherme est-elle réversible

Oui, cette fois l'équilibre thermique et mécanique avec l'extérieur sont réalisés

7) Une transformation mécaniquement réversible et adiabatique est-elle réversible ?

Oui car l'équilibre thermique interne et mécanique est réalisé (avec également l'absence de frottement solide)