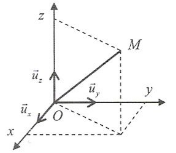
Mécanique

Cinématique du point — Dynamique du point — Moment cinétique et Moment de forces — Energétique du point — Théorèmes énergétiques et applications — Système d'ordre 2 — Mécanique du solide

Cinématique du point

On décrit le mouvement d'un point M dans un référentiel R donné (ensemble d'observateurs fixes les uns par rapport aux autres et fixes par rapport à O). On utilisera surtout deux repères :

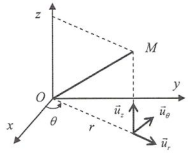
Le repère cartésien : vecteurs unitaires fixes par rapport à O



$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{M/R} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{a}_{M/R} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}}$$

Car : $\left(\frac{d\vec{u}_x}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{u}_y}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{u}_z}{dt}\right)_{/R} = \vec{0}$

Le repère cylindrique : vecteurs radial $\vec{u}_r$ et orthoradial $\vec{u}_\theta$ en mouvement par rapport à O :



$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{M/R} = \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ r(t)\dot{\theta} \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{a}_{M/R} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}}$$

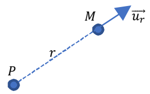
Car $\left(\frac{d\vec{u}_z}{dt}\right)_{/R} = \vec{0}$ et $\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_{/R} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_{/R} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

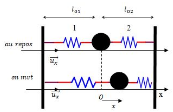
Dynamique du point

Dans un référentiel R Galiléen, **la deuxième loi de Newton** postule : $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_{M/R}}$

Exemples forces à connaître :

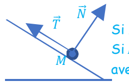
- La force électrique qu'exerce une charge q_P en P sur une charge q_M en M distantes de r : $\boxed{\vec{f} = q_M \frac{q_P}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$
- La force gravitationnelle qu'exerce une masse m_P en P sur une masse m_M en M distantes de r : $\boxed{\vec{f} = -m_M G \frac{m_P}{r^2}\vec{u}_r}$
- Le poids est un cas particulier de force gravitationnelle « corrigée » s'exerçant sur un objet de masse m à la surface de la Terre : $\boxed{\vec{f} = m\vec{g}}$ avec $g \approx 9{,}81 m.s^{-2}$
- La force de rappel d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 : $\vec{f} = \pm k(l(t) - l_0)\vec{u}_x$
- La tension $\vec{T}$ du fil n'a pas d'expression propre mais est dirigée dans la direction du fil
- Réaction $\vec{R}$ support : $\boxed{\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}}$ $\begin{cases} \vec{N} : réaction\ normale \\ \vec{T} : réaction\ tangentielle \end{cases}$





Le ressort 1 exerce une force $\vec{f} = -k(l_1 - l_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$

Le ressort 2 exerce une force $\vec{f} = k(l_2 - l_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$

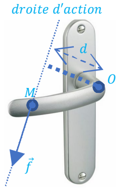


Si M fixe : $T \leq f_s N$ avec f_s coef de frottement de glissement statique

Si M mobile : $T = f_d N$ avec f_d coef de frottement de glissement dynamique avec $f_s \approx f_d$

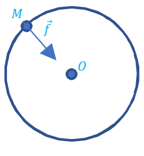
Moment cinétique et Moment de forces

- On définit le moment cinétique $\vec{L}_{O/R}$ d'un point M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport au point O fixe dans R : $\boxed{\vec{L}_{O/R} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}}$. Cette grandeur permet d'apprécier la rotation éventuelle du point M autour du point O.
- On définit le moment $\vec{M}_O(\vec{f})$ par rapport au point O d'une force $\vec{f}$ s'appliquant sur le point M : $\boxed{\vec{M}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}}$. Cette grandeur permet d'apprécier l'efficacité d'une force à mettre en rotation le point M autour du point O. $\|\vec{M}_O(\vec{f})\| = fd$ où d est le bras de levier



- **Théorème du moment cinétique** : $\boxed{\frac{d\vec{L}_{O/R}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F})}$
- Dans le cas d'un mouvement dans un champ de force centrale (cas de la force gravitationnelle et électrique pointant toujours vers le même centre de force) : $\frac{d\vec{L}_{O/R}}{dt} = \vec{0}$
  - $\vec{L}_{O/R} = \overrightarrow{Cte}$ or comme $\vec{L}_{O/R}.\overrightarrow{OM} = 0$ alors le mouvement est alors plan
  - En repérage cylindrique : $\vec{L}_{O/R} = m\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$

  $r^2\dot{\theta} = Cte$: c'est la loi des aires → si $r = Cte \rightarrow \dot{\theta} = Cte$ donc mouvement circulaire uniforme



Energétique du point

- Travail élémentaire δW d'une force $\vec{f}$ au cours d'un déplacement alors élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ du point M : $\boxed{\delta W = \vec{f}.d\overrightarrow{OM}}$
- Travail W_{AB} d'une force sur un déplacement $\overline{AB}$ donné : $\boxed{W_{AB} = \int_{AB} \vec{f}.d\overrightarrow{OM}}$
- Puissance P d'une force $\vec{f}$ transmise à un point M de vitesse $\vec{v}$ (dans R) : $\boxed{P = \vec{f}.\vec{v}}$
- Energie cinétique (dans R) d'un point de masse m : $\boxed{E_c = \frac{mv^2}{2}}$

On distingue deux types de force :

- Les forces conservatives : elles sont conservatives en énergie et ne permettent qu'un simple transfert d'énergie cinétique ↔ énergie potentielle ce qui se traduit également par un travail indépendant du chemin suivi
- Les forces non conservatives dont le travail dépend du chemin suivi : souvent les forces de frottement.

On associe aux forces conservatives une énergie potentielle (on dit qu'elles dérivent d'une énergie potentielle) : $\boxed{\vec{f}_c = -\overrightarrow{grad}E_p \leftrightarrow \vec{f}_c.d\overrightarrow{OM} = \delta W_c = -dE_p}$

$\vec{f} = \frac{q_M q_P}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$	$E_p = \frac{q_M q_P}{4\pi\varepsilon_0 r} + Cte$	$E_p(\infty) = 0 \rightarrow E_p = \frac{q_M q_P}{4\pi\varepsilon_0 r}$
$\vec{f} = -G\frac{m_M m_P}{r^2}\vec{u}_r$	$E_p = -G\frac{m_M m_P}{r} + Cte$	$E_p(\infty) = 0 \rightarrow E_p = -G\frac{m_M m_P}{r}$
$\vec{f} = m\vec{g}$	Si axe ascendant : $E_p = mgz + Cte$	$E_p(0) = 0 \rightarrow E_p = mgz$
$\vec{f} = -k(l(t) - l_0)\vec{u}_x$	$E_p = \frac{k(l(t)-l_0)^2}{2} + Cte$	$E_p(l = l_0) = 0 \rightarrow E_p = \frac{k(l(t)-l_0)^2}{2}$

- On définit l'énergie mécanique : $\boxed{E_m = E_c + E_p}$

Théorèmes énergétiques et applications

Théorème de l'énergie cinétique : $\boxed{dE_c = \delta W \leftrightarrow \Delta E_c = W_{AB}}$

Théorème de la puissance cinétique : $\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P}$

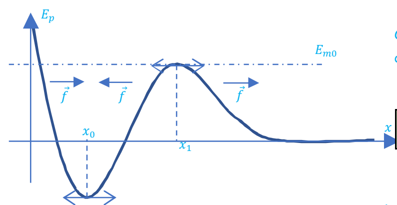
Théorème de l'énergie mécanique :

- Si travail d'une force non conservative : $\boxed{dE_m = \delta W_{nc} \rightarrow \Delta E_m = W_{nc}}$
- Dans le cas d'un système soumis uniquement à des forces conservatives : $dE_m = dE_c + dE_p = 0$ où $E_m = Cte$ (cette dernière relation est utile quand on s'intéresse aux conditions initiales et finales d'une système).

Théorème de la puissance mécanique : $\boxed{\frac{dE_m}{dt} = P_{nc}}$ où P_{nc} est la puissance des forces non conservatives

Profil de l'énergie potentielle :

Soit un mobile ponctuelle possédant un degré de liberté x, soumis uniquement à des forces conservatives dont la résultante $\vec{f} = f\vec{u}_x$ est associée à une énergie potentielle $E_p(x)$ telle que :



On a $\frac{dE_p}{dx} = -f$ donc x_0 et x_1 sont des positions d'équilibre :

$\boxed{\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} > 0 \rightarrow equlibre\ stable}$

$\boxed{\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_1} < 0 \rightarrow equlibre\ instable}$

Si $E_m = E_{m0}$ alors $E_c + E_p = E_{m0}$ et $E_p \leq E_{m0}$ car $E_c \geq 0 \rightarrow \begin{cases} état\ lié\ si\ x < x_1 \\ état\ libre\ si\ x > x_1 \end{cases}$

Autour de x_0 on peut effectuer le DL : $E_p(x) = E_p(x_0) + \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2}$ alors d'après le TPM :

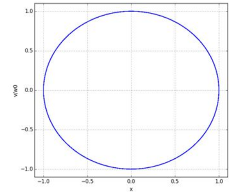
$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = 0 \rightarrow \ddot{X} + \frac{1}{m}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} X = 0 \text{ en posant } X = x - x_0$$

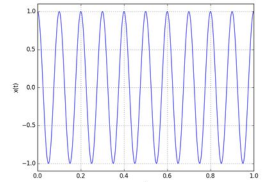
Système d'ordre 2

Système harmonique libre

$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0}$

Alors : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ (et il faut utiliser deux conditions initiales pour déterminer A et B : par exemple sur la vitesse et la position)

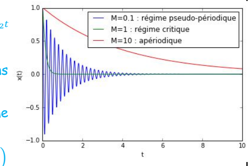




Système amorti libre $\boxed{\ddot{x} + 2M\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

- Le régime apériodique $M > 1$ alors $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $r_{1,2} = -M\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{M^2 - 1}$
- Le régime critique $M = 1$ qui est le plus rapide et sans oscillation ni dépassement : $x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$
- On retiendra également le cas du régime pseudopériodique très peu amorti $M < 1$:

  $x(t) = e^{-M\omega_0 t}\left(A\cos(\omega_0\sqrt{1 - M^2}t) + B\sin(\omega_0\sqrt{1 - M^2}t)\right)$



Système amorti forcé

En présence d'un second membre, on complète la solution précédente avec une solution « particulière » (SP). Deux cas sont souvent rencontrés :

- Le second membre est constant : on détermine la SP en l'injectant dans l'équation complète et en la supposant également constante.
- Le second membre est sinusoïdal à la pulsation ω : on suppose que la réponse du système est aussi sinusoïdale avec un éventuel déphasage $SP = x(t) = X_{max}cos(\omega t + \phi)$. L'étude se fait en utilisant la notation complexe pour trouver X_{max} (module de $\underline{x}$) et ϕ (phase de $\underline{x}$).

$$\ddot{x} + 2M\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 e \leftrightarrow \frac{\underline{x}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + 2Mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Mécanique du solide

Solide en translation uniquement : Théorème du centre de masse

L'étude du centre de masse d'un solide S (et donc du solide entier) se fait en le considérant comme un point affecté de la masse totale M_t du solide S et subissant la résultante $\vec{F}_{ext}$ des forces extérieures : $\boxed{m\vec{a}(G)_{/R} = \vec{F}_{ext}}$

Solide en rotation autour d'un axe Δ fixe de R

On utilise le moment d'inertie $J_\Delta = \int r^2 dm$ afin de caractériser la répartition de la masse autour de l'axe de rotation Δ. Le théorème du moment cinétique est indiqué pour étudier le mouvement de rotation $\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{/R}.\vec{u}_\Delta = J_\Delta\frac{d\omega}{dt} = \vec{M}_{O,fext}.\vec{u}_\Delta}$

Grandeurs	Translation suivant Ox dans R	Rotation autour d'un axe fixe Δ de R
Position	x_G	ϑ
Vitesse	$v(G)_{/R}$	$\omega = \dot{\vartheta}$
Accélération	$a(G)_{/R}$	$\frac{d\omega}{dt} = \ddot{\vartheta}$
Cause du mouvement	$\vec{F}_{ext}$: force extérieure	$\vec{M}_{O,Fext}$: moment calculé en O des forces extérieures
Grandeur d'inertie	M_t : masse totale du système	J_z : moment d'inertie
Equation du mouvement	$M_t\vec{a}(G)_{/R} = \vec{F}_{ext}$	$J_\Delta\ddot{\vartheta} = \vec{M}_O\vec{u}_\Delta$
Energie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}M_t\vec{v}^2(G)_{/R}$	$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$
Puissance	$P_{/R} = \vec{F}_{ext}.\vec{v}(G)_{/R}$	$P_{/R} = \vec{M}_{O,fext}\vec{\omega}$

Effets du poids

- Le poids d'un solide de volume V et de masse M_t est : $\iiint_V dm\vec{g} = M_t\vec{g}$
- Le moment du poids en O d'un solide est : $\vec{M}_O = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge dm\vec{g} = \left(\iiint_V dm\overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{g} = \overrightarrow{OG} \wedge M_t\vec{g}$
- La puissance du poids d'un solide dans R est :

$$P = \iiint_V dm\vec{g}.\vec{v}(M)_{/R} = \iiint_V dm\vec{g}.\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R} = \frac{d}{dt}\iiint_V dm\overrightarrow{OM}\vec{g} = M_t\vec{g}.\vec{v}(G)_{/R}$$

- L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide est (axe ascendant) :

$$dE_p = -Pdt = -M_t\vec{g}.d\overrightarrow{OG} = M_t g dz_G \text{ soit } E_p = M_t g z_G + Cte$$