Proposition de correction A.T.S. 2006

1.1) P.F.D. projeté sur $\vec{e_x}$: $\boxed{m\ddot{x} = -kx}$

1.2) $\boxed{x(t) = acos(\omega_0 t)}$

1.3) $\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2}$

1.4) Sur une période $< Ep(t) >= \frac{1}{2}k < x^2 >= \frac{1}{2}ka^2 < cos^2(\omega_0 t) >= \frac{1}{4}ka^2$ et $< Ec(t) >= \frac{1}{2}m < \dot{x}^2 >= \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 < sin^2(\omega_0 t) >= \frac{1}{4}m\omega_0^2 a^2$, on a donc égalité car $m\omega_0^2 = k$.

1.5) Maintenant $\boxed{m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx \text{ ou } \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$.

1.6) Le polynôme caractéristique à un discriminant négatif car $\lambda << \omega_0$ d'où

$$x(t) = e^{-\lambda t}(Acos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t) + Bcos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t))$$

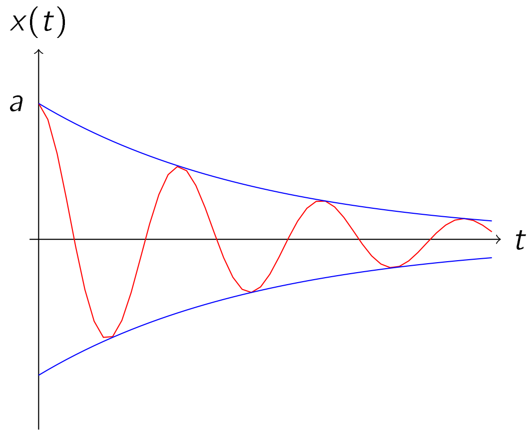
. Á l'ordre 1 en $\frac{\lambda}{\omega_0}$ on a :

$$x(t) \simeq e^{-\lambda t}(Acos(\omega_0 t) + Bcos(\omega_0 t))$$

On a comme conditions initiales : $x(t = 0) = a$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$ d'où on tire $A = a$ et $B = \frac{\lambda a}{\omega_0} \simeq 0$ à l'ordre 0 en $\frac{\lambda}{\omega_0}$. Soit finalement

$$\boxed{x(t) = e^{-\lambda t}acos(\omega_0 t)}.$$

1.7)



1.8) On a :

$$\begin{aligned}
< Em > &=< E_c > + < E_p > \\
&= \frac{1}{2}m < \dot{x}^2 > + \frac{1}{2}k < x^2 > \\
&= \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 < sin^2(\omega_0 t) > + \frac{1}{2}ka^2 < cos^2(\omega_0 t) > \\
&= \frac{1}{2}ka^2 e^{-t/\tau},
\end{aligned}$$

avec $\boxed{\tau = \frac{1}{2\lambda}.}$

2.1) Loi de Lenz-Faraday : $\boxed{e = -\frac{d\phi}{dt} = -Bvl.}$

2.2) La force de Laplace :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_{barre} i\vec{dl} \wedge \vec{B} \\ &= \int_{barre} idy\vec{e_y} \wedge B\vec{e_z} \\ &= ilB\end{aligned}$$

2.3) On a donc $\boxed{e = Ri}$

2.4) Sur $\vec{e_x}$, $\boxed{m\ddot{x} = ilB}$.

2.5) On en déduit $m\frac{dv}{dt} = \frac{elB}{R} = -\frac{B^2l^2}{R}v$ soit finalement

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0}$$

avec $\tau = \frac{mR}{B^2l^2}$.

2.6) Résolution : $\boxed{v(t) = Ae^{-t/\tau} = v_0e^{-t/\tau}}$.

2.7) On a $ei = -Bvli = Ri^2$ et $m\frac{dv}{dt}v = ilBv$, on constate que la puissance de la force de Laplace $\mathcal{P}_L = iBlv$ est l'opposée de la puissance de la f.e.m. $\mathcal{P}_e = -iBlv$ soit $\boxed{\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_e = 0}$.

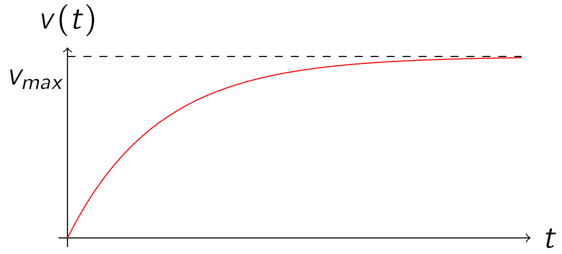
2.8) De la question précédente on tire aussi $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = -Ri^2$. L'énergie cinétique est dissipée en effet Joule par la résistance.

2.9) Équation électrique : $E + e = Ri$, équation mécanique : $m\ddot{x} = ilB$.

2.10) $m\frac{dv}{dt} = \frac{(e+E)lB}{R} = -\frac{B^2l^2}{R}v + \frac{ElB}{R}$ soit finalement

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{ElB}{mR}.}$$

2.11)



2.12) On résout l'équation différentielle sur $v(t)$, on obtient avec $v(t=0) = 0$:

$$v(t) = \frac{E}{Bl}(1 - exp(-t/\tau)).$$

On a alors

$$\begin{aligned}i(t) =& \frac{E}{R} - \frac{Blv(t)}{R} \\ =& \frac{E}{R}exp(-t/\tau)\end{aligned}$$

2.13) De façon analogue à la question 2.8) on obtient

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)$$

. La puissance fournie par le générateur est d'une part transformée en énergie cinétique et d'autre part dissipée en effet Joule par le résistance.
3.1) Équation électrique : $e = Ri = -Blv$, équation mécanique $m\ddot{x} = -kx + ilB$, en les combinant on obtient $m\ddot{x} = -kx - \frac{l^2B^2\dot{x}}{R}$ qu'on peut écrire :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0.}$$

3.2) Avec $\omega_0\tau << 1$ on est ramené à une équation analogue à la question 1.1) en remplaçant 2λ par $\frac{1}{\tau}$ avec les mêmes approximations on obtient :

$$\boxed{x(t) = exp(-\frac{t}{2\tau})acos(\omega_0 t).}$$

3.3) Comme 1.7)
3.4) On a comme bilan de puissance :

$$0 = Ri^2 + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + frac12kx^2).$$

En intégrant cette équation entre $t = 0$ et $t \to \infty$ sachant que $x(t = 0) = a$, $x(t \to \infty) = 0$, $\dot{x}(t = 0) = 0$ et $\dot{x}(t \to \infty) = 0$, on obtient :

$$\boxed{\int_{t=0}^{\infty} Ri^2 dt = \frac{1}{2}ka^2.}$$

L'énergie mécanique initiale a donc été intégralement dissipée dans la résistance.
4.1) Équation électrique : $\boxed{e = Ri = -Bl(\dot{x}_2 - \dot{x}_1).}$
4.2) P.F.D. sur chaque barre :

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - iBl, \qquad m\ddot{x}_2 = -kx_2 + iBl.$$

4.3) On en déduit :

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{1}{\tau}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0, \qquad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{1}{\tau}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0.$$

4.4)

$$\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0, \qquad \ddot{Y} + \omega_0^2 Y + \frac{2}{\tau}\dot{Y} = 0.}$$

4.5) Y se comporte comme un oscillateur avec frottements fluides, nécessairement $lim_{t\to\infty} Y = 0$. Au bout d'un temps très long, on a donc les deux barres qui ont des mouvements synchronisés, la distance entre ces barres restant constante (N.B. Attention $x_1 \to x_2$, mais ces deux abscisses ne sont pas repérées par rapport à la même origine).
Pour $t \to \infty$ on a $x_1 \simeq x_2$. On résout $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$, pour obtenir $X(t) = acos(\omega_0 t) \simeq 2x_1 \simeq 2x_2$, soit finalement

$$x_1 \simeq x_2 \simeq \frac{a}{2}cos(\omega_0 t).$$

Les deux barres oscillent en phase.
On constate que $i \to 0$ en effet avec $x_1 \simeq x_2$, il n'y a plus d'induction.

5.1) Avec une charge surfacique σ uniforme, $\boxed{\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}.}$

5.2) Résultat de cours : $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}}$ entre les armatures.

5.3) En stationnaire $\int_1^2 \vec{E} \cdot dz\vec{u_z} = V_1 - V_2 = U$ d'où $\boxed{U = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}}$

5.4) Par définition $C = Q/U$. Ici $\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 e}{S}}$.

5.5) Par définition $W_p = \frac{1}{2}(QV_1 + (-Q)V_2) = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\varepsilon_0 SeE^2$ avec les questions précédentes. On doit avoir $W_p = \iiint u_e d^3V = u_e Se$, d'où par identification $\boxed{u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$ comme attendu.

6.1) Par la loi des mailles : $U_0 = Ri(t) + \frac{Q(t)}{C}$. Comme $i(t) = \frac{dQ}{dt}$, on peut mettre l'équation sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\tau} = \frac{U_0 C}{\tau}.}$$

6.2) $\boxed{Q(t) = CU_0(1 - exp(-t/\tau).\ \tau}$ est un temps.

6.3) On a $i(t) = \frac{CU_0}{\tau}exp(-t/\tau)$.
$W_1 = \int_{t=0}^{t\to\infty} U_0 i(t)dt = CU_0^2$
$W_2 = \frac{1}{2}CU_0^2$
$W_3 = \int_{t=0}^{t\to\infty} Ri^2 dt = \frac{1}{2}CU_0^2$

6.4) En s'aidant de la partie précédente

$$E(t) = \frac{U(t)}{e} = \frac{Q(t)}{Ce} = \frac{U_0}{e}(1 - exp(-t/\tau)),$$

d'où $\boxed{\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t) = \varepsilon_0 \frac{U_0}{e}(1 - exp(-t/\tau))}$.

6.5) Entre les armatures $\vec{j} = \vec{0}$ d'où $r\vec{o}t(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j_D}$ avec

$$\vec{j_D} = \varepsilon_0 \frac{U_0}{e\tau} exp(-t/\tau)\vec{u_z}.$$

6.6) On intègre l'équation de Maxwell-Ampère sur une surface quelconque $\mathcal{S}$:

$$\iint_{\mathcal{S}} r\vec{o}t(\vec{B}) \cdot d^2\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j_D} \cdot d^2\vec{S}.$$

Théorème d'Ampère généralisé.

6.7) Pour un point M quelconque, le plan contenant l'axe (Oz) et M coupe le cylindre en deux et est un plan de symétrie des courants, le champ magnétique est donc normal au plan, il est donc orthoradial. La distribution est invariante en z et θ donc $\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{u_\theta}}$.

6.8) Pour $r < a$, on applique le théorème d'Ampère sur un cercle d'axe (Oz) et de rayon r orienté dans le même sens que $\vec{u_\theta}$. On obtient $B(r)2\pi r = \mu_0 \iint_{disque} \vec{j} \cdot d^2\vec{S} = \mu_0 j\pi r^2$. Finalement

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \frac{j\pi r}{2}\vec{u_\theta}.}$$

6.9) On remplace j de la question précédente par j_D calculée au 6.5) pour obtenir

$$\boxed{\vec{B} = \frac{U_0 r}{2\tau e c^2} exp(-t/\tau)\vec{u_\theta}.}$$

6.10) $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$.
6.11) On remplace avec le champ électrique calculé en 6.4) et le champ magnétique calculé en 6.9) pris en $r = a$ pour obtenir la formule demandée.
6.12) La puissance rayonnée vers l'extérieur vaut donc

$$\mathcal{P}_{ext} = \iint_{S_{lateral}} \vec{\Pi}\cdot d^2S\vec{u_r} = \Pi 2\pi a e$$

où l'élément de surface est bien orienté vers l'extérieur, selon $+\vec{u_r}$. Ici :

$$\boxed{\mathcal{P}_{ext} = \frac{\varepsilon_0 U_0^2 \pi a^2}{e\tau}(e^{-2t/\tau} - e^{-t/\tau}).}$$

6.13)

$$\boxed{W_{entrant} = \int_{t=0}^{\infty}(-\mathcal{P}_{ext})dt = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 U_0^2}{2e} = \frac{CU_0^2}{2}},$$

on retrouve la même énergie qu'en 6.3).
7.1)

$$\boxed{E(t) = \frac{Q(t)}{Ce} = \frac{Q_0 cos(\omega_0 t)}{\varepsilon_0 \pi a^2}.}$$

7.2) Comme en 6.9) on calcule j_D puis on applique le théorème d'Ampère généralisé pour obtenir :

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 Q_0 \omega sin(\omega t) r}{2\pi a^2}\vec{u_\theta}}.$$

7.3) On a $u_{em} = u_e + u_m$ avec $u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ et $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$.
7.4) Vu que $< cos^2 >=< sin^2 >= \frac{1}{2}$, on obtient en remplaçant

$$\boxed{\frac{< u_m >}{< u_e >} = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}}.$$

7.5) On en déduit que si $a/c << T$ alors $\frac{<u_m>}{<u_e>} << 1$ et donc $< u_{em} >\simeq< u_e >$.
Cela est vrai pour $f << \frac{c}{a} = 10^{10}Hz = 10GHz$. Dans les montages usuels on ne dépasse pas le mégahertz, donc la condition est vérifiée. a/c représente la durée de parcours de la lumière du centre d'une plaque à une extrémité, c'est de même le temps caractéristique de propagation de l'information sur la plaque.