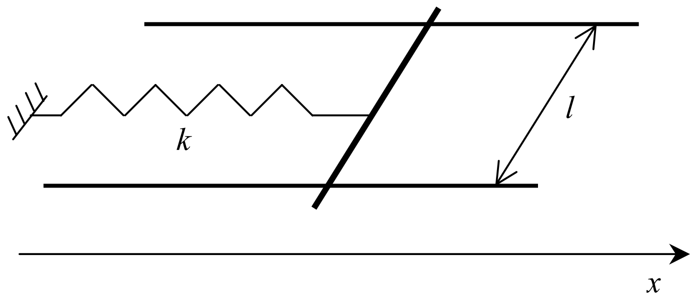
PREMIER PROBLÈME

1- Oscillations d'une barre sur des rails

A- Une barre de masse *m* peut glisser sans frottements sur deux rails parallèles. Les deux rails et la barre forment un plan horizontal. Les seuls mouvements possibles de la barre sont des translations rectilignes parallèlement à la direction des rails notée *Ox*. La barre est liée à un ressort de raideur *k*. L'origine des abscisses est choisie lorsque le ressort est au repos.

On pose $\omega_0^2 = k/m$. À l'instant initial, on lâche la barre sans vitesse initiale à l'abscisse $x = a$ avec $a > 0$.



1.1 Déterminer l'équation différentielle du mouvement par l'application du principe fondamental de la dynamique.
1.2 Déterminer l'expression de l'abscisse de la barre en fonction du temps.
1.3 Déterminer l'expression de l'énergie mécanique en fonction du temps.
1.4 Montrer, qu'en moyenne sur une période, l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle.

B- On reprend le problème précédent mais, cette fois, on suppose que la barre subit une force de frottements visqueux $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la barre et α un coefficient positif. On pose $\omega_0^2 = k/m$ et $2\lambda = \alpha/m$.

1.5 Établir l'équation différentielle du mouvement.
1.6 On suppose $\lambda \ll \omega_0$. Déterminer l'expression de l'abscisse *x* de la barre en fonction du temps *t*.
1.7 Représenter l'allure du graphe de *x* en fonction de *t*.
1.8 La condition précédente étant toujours vérifiée, montrer que l'énergie mécanique moyenne sur une pseudo-période peut se mettre sous la forme approchée :

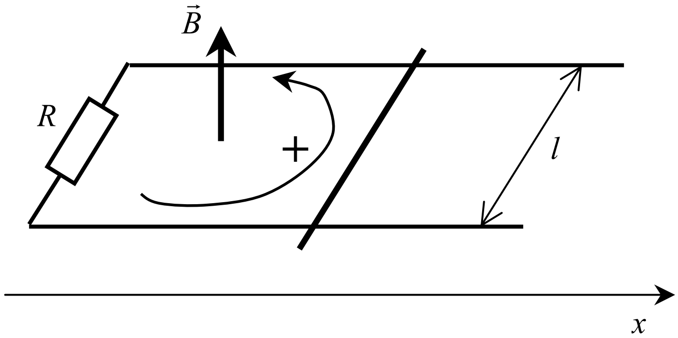
$$E_M = \frac{1}{2}ka^2e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

On donnera l'expression de τ.

2- Rails de Laplace

La barre de masse *m* peut glisser sans frottements sur des rails parallèles, distants de *l*, disposés comme précédemment. **Il n'y a plus de ressort**. En $x = 0$, les rails sont reliés par un conducteur. L'ensemble des rails, de la barre et du conducteur forme donc un circuit fermé. La résistance électrique de ce circuit est représentée par une résistance constante *R* localisée sur le conducteur reliant les deux rails (cf. figure) L'ensemble est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B}$. On définit un sens de circulation positive sur le circuit comme indiqué sur la figure. Si un courant parcourt le circuit, l'intensité sera comptée positivement si et seulement si le courant circule effectivement dans le sens positif choisi. On néglige entièrement les phénomènes d'auto-induction.

A- La barre est lancée avec la vitesse initiale v_0 dans le sens des x croissants. Soit $v = \dot{x}$ la vitesse de la barre à un instant t.



2.1 En appliquant la loi de Lenz-Faraday, déterminer l'expression de la f.é.m. induite dans le circuit à un instant t quelconque en fonction de v, B et l.

2.2 Si la barre est parcourue par un courant d'intensité i, comptée algébriquement, déterminer la composante selon Ox de la force de Laplace subie par la barre.

2.3 Faire un schéma électrique équivalent et en déduire l'équation électrique du circuit.

2.4 Déterminer l'équation mécanique par application du principe fondamental de la dynamique.

2.5 En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la barre. On posera :

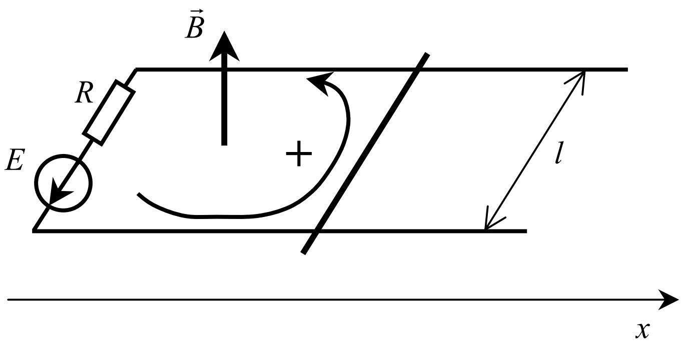
$$\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}.$$

2.6 Résoudre complètement cette équation et tracer le graphe de v en fonction de t.

2.7 Multiplier chaque membre de l'équation électrique par i et chaque membre de l'équation mécanique par v. En déduire un bilan de puissance.

2.8 Que devient l'énergie cinétique initiale de la barre ?

B- On reprend le problème précédent mais on rajoute sur le conducteur reliant les deux rails, un générateur idéal de tension de f.é.m. constante E (cf. figure). La barre est cette fois initialement immobile.



2.9 Écrire l'équation électrique du circuit et l'équation mécanique.

2.10 En déduire l'expression de la vitesse de la barre en fonction du temps. On pourra utiliser dans les expressions la constante τ définie au 2.5.

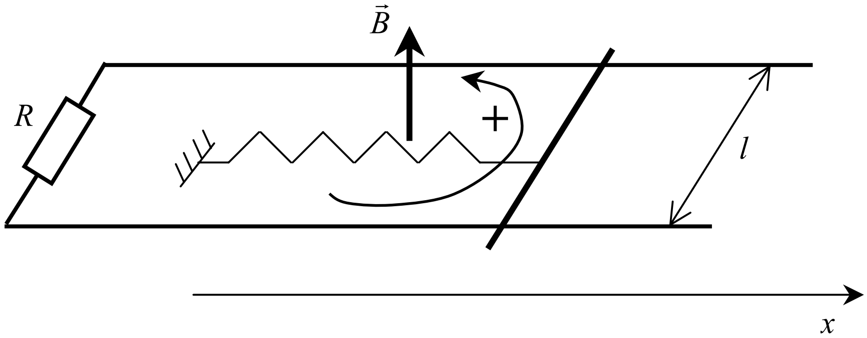
2.11 Tracer l'allure du graphe de v en fonction de t

2.12 Déterminer l'intensité i dans le circuit en fonction de t et tracer le graphe correspondant.

2.13 Faire un bilan de puissance comme au 2.7. À quoi est utilisée la puissance fournie par le générateur ?

3- Oscillations d'une barre plongée dans un champ magnétique

On reprend le dispositif du **2-A** mais maintenant la barre est reliée à un ressort de raideur k. L'origine des abscisses est prise lorsque le ressort est au repos. À l'instant initial, l'abscisse de la barre est égale à a (avec $a > 0$) et la barre est lâchée sans vitesse initiale. La barre peut glisser sans frottement sur les rails.



3.1 Écrire l'équation électrique et l'équation mécanique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x de la barre. On posera :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \tau = \frac{mR}{B^2 l^2}.$$

3.2 Résoudre complètement cette équation si $\omega_0 \tau \gg 1$.

3.3 Tracer l'allure du graphe de x en fonction du temps t.

3.4 Faire un bilan de puissance. Justifier l'égalité suivante :

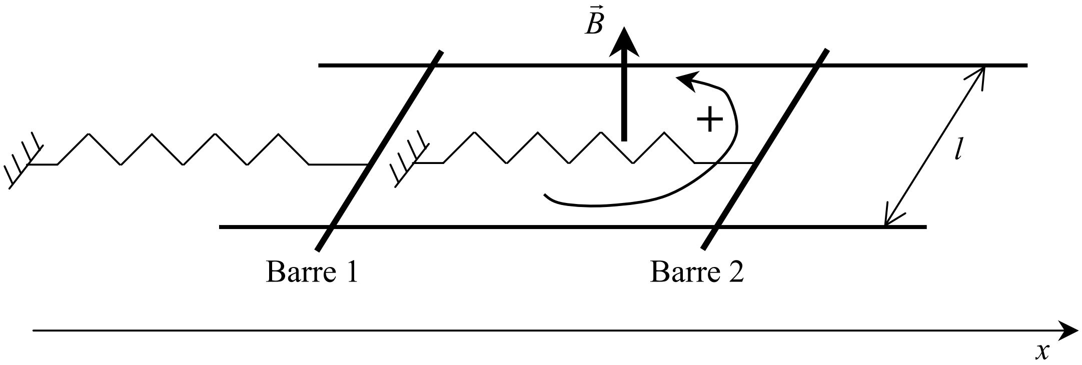
$$\int_{t=0}^{+\infty} Ri^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} k a^2.$$

4- Oscillations de deux barres plongées dans un champ magnétique

Deux barres parallèles et identiques, de même masse m, peuvent glisser sans frottement sur deux rails, parallèles, distants de l. L'ensemble des rails et des barres est dans un même plan horizontal. Les seuls mouvements possibles des barres sont des translations rectilignes parallèles à la direction Ox des rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B}$. Les deux barres et les tronçons de rails situés entre les barres forment un circuit fermé. Ce circuit fermé possède une résistance électrique R (non représentée sur le schéma ci-dessous) qui sera supposée constante quelle que soit la position des barres. On définit un sens de circulation positive sur ce circuit comme indiqué sur le schéma.

Chacune des barres est liée à un ressort de raideur k. La position de la barre 1 est repérée par son abscisse x_1, comptée à partir de la position pour laquelle le ressort auquel elle est liée est au repos. De même, la position de la barre 2 est repérée par son abscisse x_2, comptée à partir de la position pour laquelle le ressort auquel elle est liée est au repos. On se reportera à la figure ci-dessous.

À l'instant initial, les deux barres sont lâchées sans vitesse initiale aux positions $x_1(0) = a$, avec $a > 0$, et $x_2(0) = 0$.



4.1 Écrire l'équation électrique du circuit.

4.2 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacune des barres et en déduire deux équations mécaniques.

4.3 Déduire de ce qui précède le système d'équations différentielles vérifié par x_1 et x_2. On posera $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $\tau = \dfrac{mR}{B^2 l^2}$.

4.4 On pose $X = x_1 + x_2$ et $Y = x_1 - x_2$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par *X* et l'équation différentielle vérifiée par *Y*.

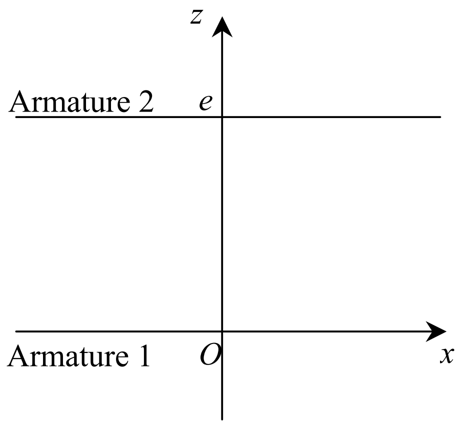
4.5 Quelle est la limite de *Y* quand $t \to \infty$? En déduire au bout d'un temps *très long* :

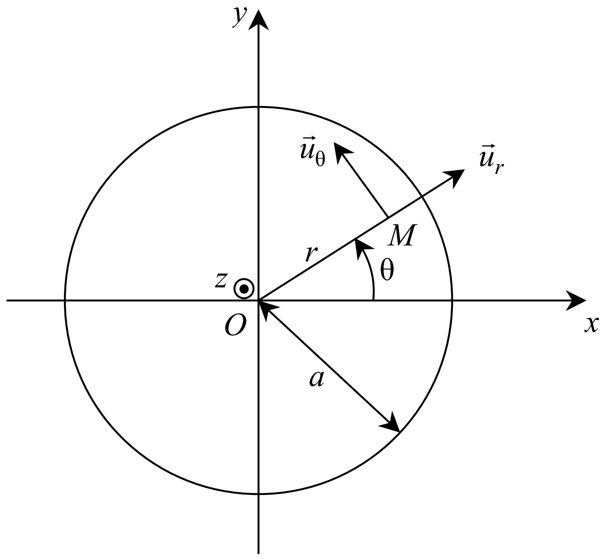
- les expressions de x_1 et x_2 en fonction de *t* et la nature du mouvement des deux barres ;
- l'intensité *i*.

SECOND PROBLÈME

LE CONDENSATEUR

On étudie un condensateur plan. Ce condensateur est supposé idéal, c'est-à-dire qu'on néglige tout effet de bord. Les armatures ont la forme de disque d'axe *Oz* et de rayon *a*. L'armature 1 est située en $z = 0$ et l'armature 2 en $z = e$. On repère un point de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). On notera $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base correspondante. On se reportera aux figures ci-dessous. L'espace entre les armatures est défini par $0 < z < e$ et $0 < r < a$. Le milieu entre les armatures est assimilable au vide (permittivité ε_0 et perméabilité μ_0).





vue de dessus

5- Électrostatique

On se place en régime stationnaire. L'armature 1 porte la charge positive *Q* et l'armature 2 la charge négative $-Q$. Le condensateur plan étant supposé idéal, la charge surfacique est uniforme sur une armature (σ sur l'armature 1 et $-\sigma$ sur l'armature 2).

5.1 Exprimer la charge surfacique σ.

5.2 Donner l'expression du champ électrostatique entre les armatures en fonction de σ, ε_0 et $\vec{u}_z$.

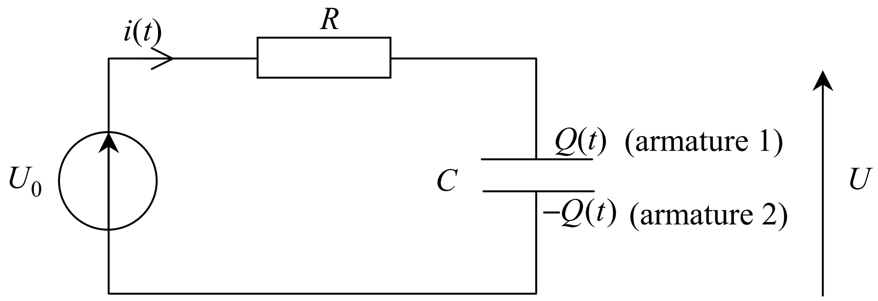
5.3 Déterminer la différence de potentiel entre les armatures $U = V_1 - V_2$ où V_1 est le potentiel de l'armature 1 et V_2 le potentiel de l'armature 2.

5.4 Définir et exprimer la capacité *C* de ce condensateur en fonction de ε_0, *e* et *S* où *S* représente la surface d'une armature ($S = \pi a^2$).

5.5 Exprimer l'énergie potentielle W_p du condensateur en fonction du champ électrostatique *E*, de *S*, *e* et ε_0. Retrouver ainsi sur cet exemple l'expression de la densité volumique d'énergie électrique u_e.

6- Charge du condensateur

Le condensateur précédent étant initialement déchargé $\left(Q(t=0)=0\right)$, on le charge à l'aide du générateur idéal de tension de f.é.m. constante U_0. On note R la résistance du circuit. On se reportera au schéma ci-dessous pour les orientations.



A- ***Champ électrique***

6.1 Déterminer la loi d'évolution de la charge Q en fonction du temps t. On fera intervenir dans cette expression la capacité C du condensateur, U_0 et la constante $\tau = RC$.

6.2 Tracer l'allure du graphe de Q en fonction de t. À quoi est homogène la constante τ ?

6.3 Déterminer, en fonction de C et U_0, pendant la durée de la charge (c'est-à-dire entre $t=0$ et t infini) :

- l'énergie W_1 fournie par le générateur ;
- l'énergie W_2 emmagasinée par le condensateur ;
- l'énergie W_3 dissipée par effet Joule.

6.4 On suppose que la charge Q varie suffisamment lentement pour que l'expression du champ électrique soit la même que celle obtenue en électrostatique à la question 5.2. Le champ électrique $\vec{E}(t)$ s'exprime donc en fonction de la charge surfacique instantanée $\sigma(t)$ au même instant t selon la même relation qu'en régime stationnaire. Écrire, en fonction de t, ε_0, U_0, e et τ, la densité surfacique de charge $\sigma(t)$ et le champ électrique $\vec{E}(t)$.

B- Courant de déplacement

6.5 On rappelle l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On appelle densité de courant de déplacement : $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On rappelle aussi l'égalité : $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$.

Écrire l'équation de Maxwell-Ampère dans le cas particulier de l'espace entre les armatures du condensateur. Exprimer la densité de courant de déplacement $\vec{j}_D$ en fonction de t, U_0, e, τ et ε_0.

6.6 Écrire la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère. Montrer qu'elle correspond à un théorème d'Ampère généralisé à condition d'inclure dans l'intensité enlacée le flux du courant de déplacement.

C- Magnétostatique

6.7 Pour déterminer le champ magnétique entre les armatures du condensateur, on étudie d'abord le dispositif suivant : un conducteur cylindrique infini, d'axe Oz (vecteur unitaire $\vec{u}_z$) et de rayon a, est parcouru par un courant stationnaire de densité uniforme $\vec{j} = j\vec{u}_z$. En étudiant les symétries du problème montrer que le champ magnétique $\vec{B}$

créé par cette distribution de courant est orthoradial et ne dépend que de r, c'est-à-dire que $\vec{B}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta .$$

6.8 En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer complètement le champ magnétique en fonction de μ_0, j et r pour $r < a$.

D- Champ magnétique

6.9 On revient au condensateur. À partir de la question 6.6, et en s'inspirant de la question 6.8, montrer que le champ magnétique entre les armatures s'écrit pour $r < a$:

$$\vec{B} = \frac{U_0 r}{2\tau e c^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{u}_\theta .$$

E- Puissance rayonnée

6.10 Rappeler la définition du vecteur de Poynting.

6.11 Montrer que le vecteur de Poynting en $r = a$ (à la limite de l'espace entre les armatures) peut s'écrire :

$$\vec{\Pi}(r = a, t) = \frac{\varepsilon_0 U_0^2 a}{2e^2\tau}\left(e^{-\frac{2t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\vec{u}_r .$$

6.12 En déduire la puissance rayonnée *sortant* de l'espace entre les armatures.

6.13 Déterminer alors l'énergie électromagnétique qui est *entrée* dans l'espace compris entre les armatures pendant la charge du condensateur (c'est-à-dire entre $t = 0$ et t infini). Comparer avec l'énergie emmagasinée par le condensateur obtenue à la question 6.3.

7- Condensateur en régime sinusoïdal permanent

Le condensateur précédent est relié à un générateur idéal de tension délivrant une f.é.m. sinusoïdale. La charge $Q(t)$ portée par l'armature 1 varie donc sinusoïdalement selon la loi $Q = Q_0 \cos(\omega t)$. L'armature 2 porte une charge opposée. La charge se répartit encore uniformément sur les armatures. On suppose que les variations temporelles sont suffisamment lentes pour que le champ électrique entre les armatures conserve la même expression qu'en régime stationnaire.

7.1 Exprimer le champ électrique entre les armatures en fonction de Q_0, ω, ε_0, a et t.

7.2 Déterminer le champ magnétique entre les armatures (par la même méthode qu'à la question 6.9). On exprimera $\vec{B}$ en fonction de Q_0, ω, μ_0, a, r et t.

7.3 Rappeler la définition de la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em}, de la densité volumique d'énergie magnétique u_m et de la densité volumique d'énergie électrique u_e.

7.4 Montrer que le rapport de la densité volumique moyenne d'énergie magnétique sur la densité volumique moyenne d'énergie électrique s'écrit :

$$\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_e \rangle} = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} .$$

7.5 En déduire que si a/c est très petit devant la période $T = 2\pi/\omega$, la densité moyenne d'énergie électromagnétique se confond avec la densité moyenne d'énergie électrique. Si $a = 3$ cm, dans quel domaine de fréquence la condition précédente est-elle vérifiée (on rappelle que $c = 3.10^8$ m.s^{-1}) ? Cette condition est-elle vérifiée dans les montages usuels ? Que représente physiquement la durée a/c ?