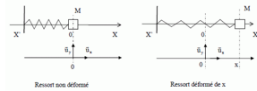


A31	niveau de maîtrise	poids compétence	note compétence	note globale
Savoir énoncer les résultats importants du cours	2	10	10,0	#DIV/0!
Connaître les hypothèses d'application des résultats	2			
Savoir appliquer directement son cours sur un exemple simple	2			
S'approprier : faire un schéma, identifier les grandeurs physiques et les hypothèses	NE	6	6,0	
Analyser : adapter l'écriture des relations, théorèmes ou principes à la situation proposée	2			
Réaliser :Savoir mener les calculs analytiques, numériques, résolutions d'équations	2			
Valider : Vérifier la pertinence du résultat obtenu (critique de la valeur et de sa dimension)	NE			
Communiquer à l'oral dans un langage courant, scientifique et approprié	NE	4	#DIV/0!	
Rédiger proprement ses démarches au tableau	NE			

ajustement	+	-	note	#DIV/0!
Remarques : Très bien				

Théorème d'Emmy Noether et lois de conservation

Le théorème d'Emmy Noether précise que si le Lagrangien d'un système physique présente une invariance alors il existe une grandeur physique associée qui se conserve. Pour illustrer le théorème d'Emmy Noether, on va considérer un système masse-ressort horizontal étudié dans un référentiel Galiléen :



La masse m est repérée par sa position x par rapport au repère (ressort à sa longueur à vide). On note $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ sa vitesse et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ son accélération. Le ressort est de raideur k constante. Dans cet exercice nous supposons que la masse m est une fonction du temps.

- 1) Appliquer la 2^e loi de Newton et projeter cette équation suivant $\vec{u}_x$.
- 2) Donner l'expression de l'énergie cinétique $E_c(\dot{x}, t)$ en fonction des données du problème.
- 3) Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_p(x)$ en fonction des données du problème. On prendra $E_p(0) = 0$.

On définit le lagrangien L par $L(\dot{x}, x, t) = E_c(\dot{x}, t) - E_p(x)$

- 4) Exprimer $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x,t}$ en fonction de k et x .

- 5) Exprimer $\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,t}$ puis $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x,t}$

- 6) En déduire que $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x,t} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,t}$

Le résultat précédent peut aussi s'écrire en utilisant la quantité de mouvement $p = m\dot{x}$, ainsi $\frac{d}{dt}p = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,t}$

Ce résultat se généralise à tout système : Si le lagrangien d'un système est invariant par translation dans l'espace $\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,t} = 0$ alors sa quantité de mouvement se conserve (on retrouve ici une autre formulation du principe d'inertie).

- 7) Donner l'expression de la différentielle dL en fonction des dérivées partielles de L .

- 8) En déduire que $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$

- 9) En déduire alors que $\frac{d^2L}{dt^2} = -\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,\dot{x}}$

Ce résultat se généralise à tout système : si le lagrangien d'un système est invariant dans le temps $\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}} = 0$ alors son énergie mécanique associée est conservée (on retrouve ici, une autre formulation du théorème de la puissance mécanique). On peut aussi démontrer que si le Lagrangien d'un système est isotrope alors son moment cinétique est conservé. Les lois de conservations (énergie, charge, ...) ne sont donc pas des postulats indépendants.

Dans ces conditions, on a :

- D'après la 2^e loi de Newton $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$
- Expression de l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$
- Expression de l'énergie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$
- Expression du lagrangien : $L(\dot{x}, x, t) = E_c(\dot{x}, t) - E_p(x) = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - \frac{1}{2}kx^2$

On peut remarquer que $\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

Et que : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}m\dot{x} = \frac{dp}{dt}$

D'où : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

On a alors : $dL = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x,t} d\dot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x,t} dx + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}} dt$

Et donc $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$

Or, nous avons vu que : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

Donc $\frac{dL}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$

Les propriétés du calcul de dérivée permettent d'écrire $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$

Soit :

$$\frac{d}{dt}\left(L - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}\right) = \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(L - 2E_c\right) = -\frac{dE_p}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{x,\dot{x}}$$

A32	niveau de maîtrise	poids compétence	note compétence	note globale
Savoir énoncer les résultats importants du cours	2	10	8,3	#DIV/0!
Connaître les hypothèses d'application des résultats	2			
Savoir appliquer directement son cours sur un exemple simple	1			
S'approprier : faire un schéma, identifier les grandeurs physiques et les hypothèses	NE	6	3,0	
Analyser : adapter l'écriture des relations, théorèmes ou principes à la situation proposée	NE			
Réaliser :Savoir mener les calculs analytiques, numériques, résolutions d'équations	1			
Valider : Vérifier la pertinence du résultat obtenu (critique de la valeur et de sa dimension)	NE			
Communiquer à l'oral dans un langage courant, scientifique et approprié	NE	4	#DIV/0!	
Rédiger proprement ses démarches au tableau	NE			

	+	-		
ajustement	*		note	#DIV/0!

Remarques : Exo2 : OK, Exo3 : avec de l'aide

Traçer l'allure des diagrammes de Clapeyron $P(V)$ suivi un gaz parfait dans les situations suivantes :

	Isochore	Isobare	Isotherme	Adiabatique + mécaniquement réversible
Chauffage				
Refroidissement				
Compression				
Détente				

Différentielle totale exacte et forme différentielle :

Soit $f(x,y) = x^2 + 2xy$

- 1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$
- 2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$
- 3) Vérifier que $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$

Soit $d\psi = 2xydx + 4xydy$. Supposons que $\psi(x,y)$ existe :

- 1) Calculer $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \psi}{\partial x})$
- 2) Calculer $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \psi}{\partial y})$
- 3) Cette différentielle est associée à une unique fonction si $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \psi}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \psi}{\partial y})$. Est-ce le cas ?

Dérivée partielle

On montre que les paramètres d'état d'un système thermodynamique fermé vérifient :

$$\frac{\partial V}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial V} = -1$$

On considère une huile liquide associée à un coefficient de dilatation isobare α et de compressibilité isochore χ_T .

- 1) Montrer que : $(\frac{\partial P}{\partial T})$ peut s'exprimer en fonction de α et χ_T .
- 2) L'huile étudiée remplit une ampoule soignée pouvant supporter une pression interne maximale de 10 bar. Quelle augmentation de température peut-elle supporter sachant que $\alpha = 10^{-4}K^{-1}$ et $\chi_T = 10^{-9}Pa^{-1}$?

Ordre de grandeur

- 1) Donner la dimension typique d'un atome
- 2) Donner la distance typique entre deux atomes d'un solide.
- 3) On considère un solide cristallin qui cristallise dans un cube d'arrête a . Il s'agit réseau cubique simple. En déduire la valeur de la masse volumique de ce solide si sa masse molaire $M = 10g.mol^{-1}$

Pour un GP	Isochore	Isobare	Isotherme	Adiabatique
Chauffage : $T_{ext} > T + Q > 0$			NON	NON
Refroidissement : $T_{ext} < T + Q < 0$			NON	NON
Compression : $P_{ext} > P \rightarrow \Delta P > 0 + \Delta V < 0$	NON	NON		
Détente : $P_{ext} < P \rightarrow \Delta P < 0 + \Delta V > 0$	NON	NON		

Différentielle totale exacte et forme différentielle :

Soit $f(x,y) = x^2 + 2xy$

- 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$
- 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x$
- 3) $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 2$

Soit $d\psi = 2xydx + 4xydy$.

- 1) $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \psi}{\partial x}) = 2$
- 2) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \psi}{\partial y}) = 4$
- 3) $d\psi$ est id une forme différentielle et pas une différentielle totale exacte.

Dérivée partielle et gaz parfait

$$\frac{\partial V}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{V\chi_T}{V\alpha} \frac{\partial P}{\partial T} = -1$$

Donc $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\alpha}{\chi_T} = 10^5 Pa.K^{-1}$ donc $\Delta T = 10K$

Ordre de grandeur

- 1) Typiquement 100pm
- 2) Typiquement quelques 100pm.
- 3) $\rho = \frac{m}{V} = \frac{NM}{N/V} = \frac{NM}{\mu_{cell} \times \frac{1 \times 10^{-28}}{10^{23}} m^{-3}} < 10^3 kg.m^{-3}$ (avec les approximations ce résultat est un peu trop grand)

A33	niveau de maîtrise	poids compétence	note compétence	note globale
Savoir énoncer les résultats importants du cours	2	10	10,0	#DIV/0!
Connaître les hypothèses d'application des résultats	2			
Savoir appliquer directement son cours sur un exemple simple	2			
S'approprier : faire un schéma, identifier les grandeurs physiques et les hypothèses	NE	6	3,0	
Analyser : adapter l'écriture des relations, théorèmes ou principes à la situation proposée	1			
Réaliser :Savoir mener les calculs analytiques, numériques, résolutions d'équations	1			
Valider : Vérifier la pertinence du résultat obtenu (critique de la valeur et de sa dimension)	NE			
Communiquer à l'oral dans un langage courant, scientifique et approprié	NE	4	#DIV/0!	
Rédiger proprement ses démarches au tableau	NE			

	ajustement	+	-	note	#DIV/0!
			*		
Remarques : sujet pas simple : mais avec de l'aide, tu as pu avancer					

Exercice1 :

Soit la fonction énergie interne $U(T,V)$ et la fonction entropie $S(T,V)$ des variables T et V .

- Donner les expressions des différentielles dU et dS en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial T}, \frac{\partial U}{\partial V}, \frac{\partial S}{\partial T}, \frac{\partial S}{\partial V}$
- On rappelle l'identité thermodynamique $dU = TdS - pdV$ et on note $C_v = \frac{\partial U}{\partial T}$. Montrer que $dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial S}{\partial V} - p\right) dV$
- On définit la fonction énergie libre $F = U - TS$. Exprimer la différentielle en utilisant l'identité thermodynamique
- En déduire que $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V}$.
- Montrer que pour un GP, on a $dU = C_v dT$
- Montrer que pour un gaz réel vérifiant $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ on a

$$dU = C_v dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$$

- Montrer que l'énergie interne d'une gaz parfait est

$$U(T,V) = U_0 + C_v T - \frac{n^2 a}{V}$$

Exercice 1:

$$dU(T,V) = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV = C_v dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV(1)$$

$$dS(T,V) = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV(2)$$

$$\text{Or } dU = TdS - pdV(3)$$

Donc en mettant (2) dans (3) et par identification avec 1

$$dU = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV \right) - pdV$$

$$dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial S}{\partial V} - p \right) dV(4)$$

$$\text{Or si on construit : } F(T,V) = U(T,V) - TS(T,V)$$

$$\text{Alors } dF = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT$$

$$\text{Donc cette différentielle implique : } \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V} (5)$$

$$\text{En mettant (5) dans (4):} dU = C_v dT + \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) dV(4)$$

$$\text{Pour GP: } T \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nRT}{V} = p \text{ et donc } dU = C_v dT$$

$$\text{Pour GR : } p = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{n^2 a}{V^2} \text{ donc } T \frac{\partial p}{\partial T} - p = \frac{n^2 a}{V^2}$$

$$dU = C_v dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$$

$$\text{Donc : } U(T,V) = C_v T + K(V) \text{ et } K'(V) = \frac{n^2 a}{V^2} \rightarrow K(V) = -\frac{n^2 a}{V} + Cte$$

$$U(T,V) = U_0 + C_v T - \frac{n^2 a}{V}$$