

Le Mesurande =
grandeur x que l'on
veut mesurer

Variabilité de la mesure = Si on prend
plusieurs voltmètres identiques, on va
observer plusieurs valeurs. Avec un seul
appareil cette variabilité peut être
observée en changeant de calibre

Mesures et incertitudes

Incertitude-type $u(x)$ = paramètre
associé au résultat d'un processus
de mesures qui caractérise la
dispersion des valeurs que l'on
peut attribuer à la grandeur
mesurée (ici x)

Détermination de l'incertitude-type $u(x)$

Evaluation de type A : il s'agit d'une évaluation de
l'incertitude-type à partir d'un nombre N de
mesurages de x dans les mêmes conditions. Pour
une série de valeurs, la moyenne est le meilleur
estimateur de la mesurande. On suppose que les
points vérifient une loi de probabilité gaussienne

Evaluation de type B de l'incertitude = il
s'agit d'une évaluation de l'incertitude-type
lors d'un mesurage unique. On suppose que
la loi de probabilité uniforme

On obtient la valeur moyenne $\bar{x}$:

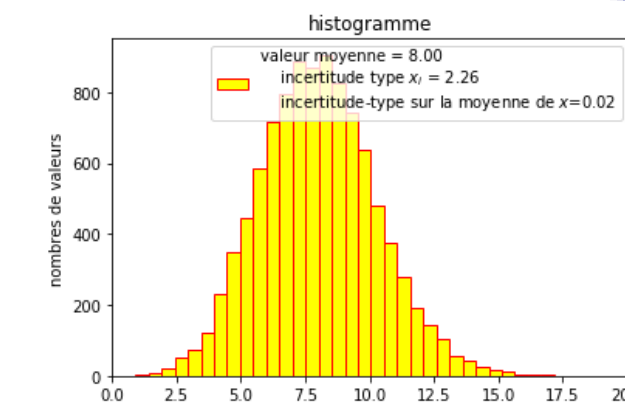
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

L'incertitude-type associée à $\bar{x}$ est donné par :

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \times \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

On écrit alors le résultat sous la forme :

$$x = (\bar{x} \pm u(\bar{x})) \text{ unité}$$



Lors d'un mesurage, on pourra rencontrer les sources
d'incertitudes suivantes :

- Incertitude-type de lecture sur des graduations :
L'incertitude-type lors de la lecture sur un appareil dont
l'intervalle entre deux graduations est l est : $u(x) \approx \frac{l}{\sqrt{3}}$

- Incertitude-type sur une valeur constructeur :

$$u(x) \approx \frac{x\% + m \text{ digits}}{\sqrt{3}}$$

Où x est la valeur lue et m est un coefficient appliqué à la
plus petite puissance de dix affichée

- Incertitude-type d'appréciation

Il s'agit de l'incertitude-type que l'on donne lors d'une
lecture du mesurande pour laquelle tout un ensemble de
valeurs comprise entre $x_{\min}$ et $x_{\max}$ peut convenir pour la
mesurande. Dans une 1^{re} approche on peut donner une
estimation de $u(x)$ par : $u(x) \approx \frac{(x_{\max} - x_{\min})/2}{\sqrt{3}}$

Si plusieurs sources d'incertitude alors l'incertitude-type

totale : $u(x) = (\sum_i u_i^2(x))^{1/2}$
On écrit alors : $x = (x_{lue} \pm u(x_{lue})) \text{ unité}$

Par convention, l'incertitude-type est donnée avec 2 chiffres significatifs et le dernier
chiffre de la valeur de x est à la même position que le dernier chiffre de l'incertitude-
type. Par exemple si $x = (623,5 \pm 11,3) \text{ unité} \Rightarrow (623 \pm 11) \text{ unité}$

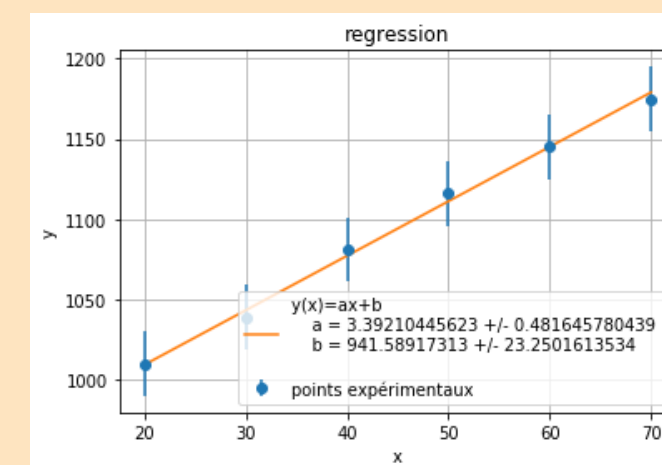
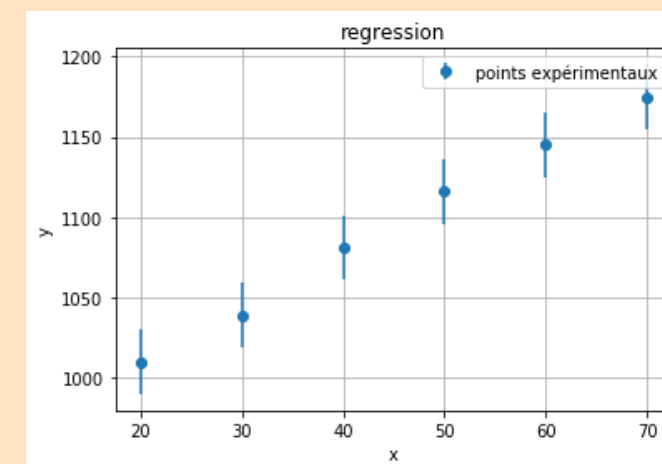
Tester une loi affine :

Une série de mesures des couples (x_i, y_i)
peut permettre de tester une loi physique
affine $y(x) = a_{\text{ref}}x + b_{\text{ref}}$.

Chaque couple de mesures (x_i, y_i) est
associé à des incertitudes-types
 $(u(x_i), u(y_i))$. En général, on ne prend en
compte que $u(y_i)$. A l'aide de la méthode
de Monte Carlo on va envisager tous les
points correspondant au triplet $(x_i, y_i, u(y_i))$
(graphiquement chaque mesure est
associée à une barre d'erreur) en les tirant
aléatoirement selon une loi de probabilité
normale.

- A chaque itération, on tire un couple
 (x_i, y_i) possible pour chaque point,
- On applique la méthode des moindres
carrés (qui trouve $(a_{\text{exp},i}, b_{\text{exp},i})$ en
cherchant à minimiser la quantité
 $\sum_{i=1}^N (y_i - a_{\text{exp},i}x_i - b_{\text{exp},i})^2$

Ce calcul est effectué N fois afin d'obtenir
un tableau de valeurs de $(a_{\text{exp},i}, b_{\text{exp},i})$ à
partir duquel on peut calculer la valeur
moyenne et l'écart type



Tester une loi affine sur python:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def RegLin(X,Y,u_Y):
M=10000#nbr itérations pour Monte Carlos
tab_a=np.zeros((M))
tab_b=np.zeros((M))
for i in range(0,M):
    tab_Y=np.random.normal(Y,u_Y)
    p=np.polyfit(X,tab_Y,1)#(moindres carrés)
    tab_a[i]=p[0]#pente
    tab_b[i]=p[1]#Y(0)
a = np.mean(tab_a)#moyenne des pentes
b = np.mean(tab_b)#moyenne des ordonnées à l'origine
u_a=np.std(tab_a)#écart type ou incertitude-type
u_b=np.std(tab_b)# écart type ou incertitude-type
```

Les mesures effectuées ne pourront en aucun cas déterminer si la loi testée est juste
ou fausse. Nous pourrions simplement dire que si aucun désaccord significatif n'est
mis en évidence, alors les résultats sont compatibles avec la loi testée.

Il faudra donc être attentif à :

- Vérifier visuellement la répartition des points : sont-ils bien situés de manière
aléatoire autour de la droite de régression ?
- vérifier la compatibilité de la pente obtenue avec une valeur de référence (qui
elle-même issue d'une autre mesure mais plus précise); on peut comparer $\left| \frac{\bar{a} - a_{\text{theo}}}{u(a)} \right|$
pour apprécier la variabilité de cette mesure
- vérifier la compatibilité de l'ordonnée à l'origine $\left| \frac{\bar{b} - b_{\text{theo}}}{u(b)} \right|$.

Mesurage = Le mesurage est une procédure
expérimentale visant à attribuer un ensemble
de valeur raisonnablement attribuables à la
mesurande. Il convient de toujours préciser le
principe d'évaluation de ces valeurs

En TP, on teste des lois, on ne vérifie pas des lois, On
vérifie que des mesures sont compatibles avec le
modèle du décrit l'expérience.

On peut utiliser la grandeur:

$$z = \frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$$

Si $z < 2$ alors on considère que le résultat est
compatible avec la référence

1^{re} méthode (simple):

Soient $y_{\max}$ et $y_{\min}$ les valeurs maximales
et minimales des paramètres x_i , alors :

$$u(y) = (y_{\max} - y_{\min})/2$$

2^{de} méthode :

On calcule chaque valeur de y et on
fait un traitement de type A de
l'incertitude

Propagation des
incertitudes : Soit
une grandeur y
 $y = f(x_1, x_2, \dots)$ est
reliée à une
collection de
valeurs x_i

3^{de} méthode (analytique):
Avec le calcul différentiel, on
démontre le résultat suivants :

$$u(f) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2}$$

Exemple : $a = bc$

$$\frac{u(a)}{a} = \sqrt{\left(\frac{u(b)}{b} \right)^2 + \left(\frac{u(c)}{c} \right)^2}$$

4^{de} méthode : La méthode de Monte-Carlo

A l'aide de l'outils informatique, il est possible de commander N calculs de y tels que :

$$y_i = f(\bar{x}_i + k_i u(x_i))$$

Avec k_i des coefficients choisis au hasard dans une loi normale. Avec un nombre N
suffisant on peut calculer une valeur moyenne et un écart-type.

On donne ci-dessous un programme réalisé sous python permettant d'apprécier la
propagation des incertitudes sur un paramètre a tel que $a = bc$ avec b et c deux
grandeurs associées respectivement aux incertitudes-types $u(b)$ et $u(c)$:

```
b= #valeur de b à déclarer
c= #valeur de c à déclarer
u_b= #valeur de u_b à déclarer
u_c= #valeur de u_c à déclarer
N=10000
tab_a=np.zeros((N))
for i in range(N):
    b_new=np.random.normal(b,u_b)#On génère une valeur aléatoire pour b (loi Gaussienne)
    c_new=np.random.uniform(c-u_c,c+u_c)#On génère une valeur aléatoire pour c (loi
    uniforme)
    tab_a[i]=b_new*c_new # On calcule « tous » les a = b*c
a = np.mean(tab_a)#valeur de a
u_a=np.std(tab_a)#incertitude-type de a
```