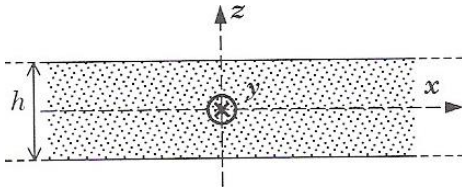


Exercice 1 : électrostatique

Soit une plaque d'épaisseur h chargée en volume avec une densité ρ supposée uniforme. La plaque est supposée infinie suivant Ox et Oy et le repérage est tel que xOy est un plan de symétrie de la distribution de charges.



- Déterminer, en justifiant votre démarche, la direction du champ électrique en un point M quelconque. Mener également étude des invariances du champ électrique.
- Déterminer le champ électrique en utilisant le théorème de Gauss.
- Retrouver l'expression du champ électrique en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss.
- En déduire l'évolution du potentiel électrostatique si $V(z = 0) = 0$.

Exercice 1 : électrostatique

a) Le champ électrique est $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$

$$b) \begin{cases} |z| \leq \frac{h}{2} : 2Es = \frac{2\rho Sz}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z \\ z \geq \frac{h}{2} : 2Es = \frac{\rho Sh}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \\ z \leq -\frac{h}{2} : \vec{E} = -\frac{\rho h}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} |z| \leq \frac{h}{2} : \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z \\ z \geq \frac{h}{2} : \frac{dE}{dz} = 0 \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \\ z \leq -\frac{h}{2} : \frac{dE}{dz} = 0 \rightarrow \vec{E} = -\frac{\rho h}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z| \leq \frac{h}{2} : V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} \\ z \geq \frac{h}{2} : V = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} \left(\frac{h}{4} - z \right) \\ z \leq -\frac{h}{2} : V = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} \left(-\frac{3h}{4} + z \right) \end{cases}$$

Exercice 2 : Magnétostatique

On étudie une distribution de courant caractérisée par le vecteur densité de courant $\vec{j}(x, y, z)$ suivant (j_0 et a sont des constantes):

$$\begin{cases} |z| < a : \vec{j}(x, y, z) = j_0 \vec{u}_x \\ |z| \geq a : \vec{j}(x, y, z) = \vec{0} \end{cases}$$

- Déterminer, en justifiant votre démarche, la direction du champ magnétique en un point M quelconque.
- Déterminer le champ magnétique en utilisant le théorème d'Ampère.
- Retrouver l'expression du champ magnétique en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère

Exercice 2 : Magnétostatique

a) Le champ magnétique est $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_y$

$$b) \begin{cases} |z| \leq a : -2Bl = \mu_0 2jz \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 jz \vec{u}_z \\ z \geq a : -2Bl = \mu_0 2jal \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 ja \vec{u}_z \\ z \leq -a : \vec{E} = \vec{B} = \mu_0 ja \vec{u}_z \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} |z| \leq a : -\frac{dB}{dz} = \mu_0 j \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 jz \vec{u}_z \\ z \geq a : \frac{dB}{dz} = 0 \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 ja \vec{u}_z \\ z \leq -a : \frac{dB}{dz} = 0 \rightarrow \vec{B} = \mu_0 ja \vec{u}_z \end{cases}$$

Exercice 3 : Cinétique et Thermodynamique chimie

On considère la réaction d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $C_a = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, de volume $V_a = 0,25 \text{ L}$ avec de la soude de concentration $C_b = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et de volume $V_b = 0,25 \text{ L}$ dans un calorimètre parfaitement calorifugé. L'ensemble {solution-réacteur} est de capacité thermique équivalente $C = 2000 \text{ K} \cdot \text{K}^{-1}$. Dans la suite on se place dans l'approximation d'Ellingham.

- 1) Ecrire la réaction observée puis rappeler la valeur de sa constante d'équilibre à 298K.
- 2) Après avoir établi un tableau d'avancement, donc la valeur de l'avancement de cette réaction.
- 3) A l'aide d'un thermomètre, on mesure une température initiale de 298°K et une température finale de 305°K au bout de quelques secondes. Proposer un cycle de Hess et en déduire la valeur de l'enthalpie de réaction $\Delta_r H^0$

On suppose la cinétique d'ordre 1 par rapport à chacun de deux réactifs (ordre global égale à 2). On considère également que la température T impacte la constante cinétique $k(T)$ qui suit la loi d'Arrhénius : $k(T) = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$ avec E_a l'énergie d'activation et où :

$$\begin{cases} A = 5 \text{ s}^{-2} \\ E_a = 1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ R = 8.314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$$

- 4) Montrer que la concentration $[H_{aq}^+]$ vérifie une équation différentielle telle que $\frac{d[H_{aq}^+]}{dt} = f([H_{aq}^+], T)$
On donnera l'expression de la fonction $f([H_{aq}^+], T)$
- 5) Montrer qu'un schéma d'Euler explicite aboutit au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} [H_{aq}^+]_{i+1} = [H_{aq}^+]_i + T_e * A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_i}\right) [H_{aq}^+]_i^2 \\ X_e = \frac{[H_{aq}^+]_i - [H_{aq}^+]_{i+1}}{V_a + V_b} \\ T_{i+1} = T_i - \frac{\Delta_r H^0 X_e}{C} \end{cases}$$

En notant X_e le pas de l'avancement entre deux instants successifs : $t_{i+1} = t_i + T_e$

- 6) Faire une simulation numérique de la situation et apporter des commentaires

La réaction est :



La constante d'équilibre associée est $K = 10^{14}$

La réaction est donc quantitative et l'avancement est donc égale à :

$$\xi_f = 0.25 \text{ mol}$$

On a alors : $\Delta_r H^0 \xi_e = -C(T_f - T_i)$

$$\text{Soit } \Delta_r H^0 = -\frac{C \Delta T}{\xi_e} = 2000 * \frac{7}{0.25} = 56 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

L'étude cinétique aboutit alors à :

$$v = -\frac{d[H^+]}{dt} = k[H^+]^2 = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) [H^+]^2$$

Donc avec une formule de différence finie et un schéma d'Euler explicite :

$$[H^+]_{i+1} = [H^+]_i + T_e * A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_i}\right) [H^+]_i^2$$

Si on différencie la relation $\Delta_r H^0 \xi_e = -C(T_f - T_i)$ alors :

$$\Delta_r H^0 d\xi = -C dT$$

$$\text{Numériquement : } T_{i+1} = T_i - \frac{\Delta_r H^0 X_e}{C}$$

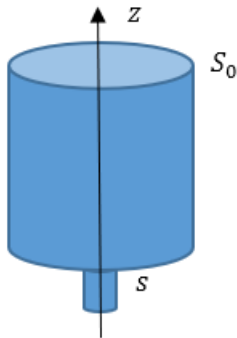
En notant X_e le pas de l'avancement

$$\text{Et chimiquement } \frac{[H_{aq}^+]_{i+1}}{V_a + V_b} = \frac{[H_{aq}^+]_i}{V_a + V_b} - X_e$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
k0=5
C=2000
Ea=1000
R=8.314
tau=1
Va=Vb=0.25
Ca=1
tab_t=np.arange(0,10*tau,tau/10)
Te=tau/10
H=np.ones(len(tab_t))*Ca*Va/(Va+Vb)
T=np.ones(len(tab_t))*298
delta_H=-56000
for i in range(len(tab_t)-1):
    H[i+1]=H[i]-H[i]**2*k0*Te*np.exp(-Ea/(R*T[i]))
    Xe=(H[i]-H[i+1])/(Va+Vb)
    T[i+1]=T[i]-delta_H*Xe/C
```

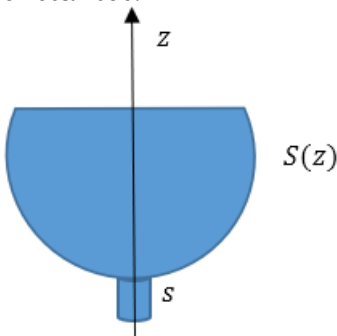
Exercice 4 : Mécanique des fluides

Un récipient, à symétrie de révolution autour de l'axe Oz , de section horizontale S , se vidange à travers un orifice O de très faible section s percé au fond. L'intensité de champ de pesanteur est $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



- 1) Exprimer l'équation différentielle vérifiée par la variation de l'altitude $\frac{dz}{dt}$ du niveau de l'eau
- 2) On suppose que $S = S_0$ est une constante et qu'une hauteur $h = 20 \text{ cm}$ d'eau est initialement présente. Déterminer la valeur du rapport $\frac{S}{s}$ assurant une vidange complète du réservoir en 10s

On suppose maintenant que $S(z) = S_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$ où S_0 et z_0 sont des constantes.



- 3) Déterminer la valeur de n qui permet d'avoir une hauteur de liquide $z(t)$ qui varie linéairement avec le temps

- 1) L'application de Bernoulli (dans un régime quasi-stationnaire) et l'hypothèse d'un fluide incompressible

$$-\frac{dz}{dt} = \frac{s}{S} \sqrt{2gz}$$

- 2) Si $S = \text{cte}$ alors $\int_h^0 z^{-\frac{1}{2}} dz = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} \int_0^\tau dt$

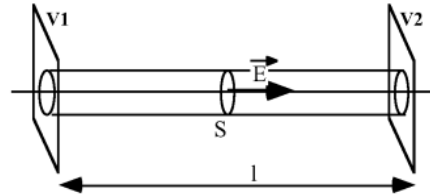
$$\frac{\tau}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{s}{S} = 50$$

- 3) Si $S(z) = S_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$, $-\frac{dz}{dt} = \frac{s}{S_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^n} \sqrt{2gz} =$

$$\text{Cte} \rightarrow n = \frac{1}{2}$$

Exercice 5 : Bilan d'énergie

Soit un conducteur de section S , de rayon R , de longueur l , de conductivité γ siège d'un courant d'intensité I sous l'action d'un champ électrique \vec{E} uniforme et associé à la différence de potentiel $V_1 - V_2 = U$. On néglige les effets de bords en supposant $l \gg R$ et le régime est stationnaire.



Déterminer :

- Le champ magnétostatique
 - L'expression du vecteur de Poynting
 - La puissance rentrant à travers les parois du conducteur
- Le champ magnétostatique : En dehors de la structure $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
 - L'expression du vecteur de Poynting : $\vec{\pi} = -\frac{EB}{\mu_0} \vec{u}_r$
 - La puissance rentrant à travers les parois du conducteur
- $$P = \frac{EB}{\mu_0} l 2\pi R = EIl = UI$$

Exercice 6 : Statique des fluides

On assimile le soleil à un fluide statique, incompressible de masse volumique ρ occupant une sphère de rayon R . Dans cette sphère, le champ de pesanteur est radial et vaut $\vec{g} = -\frac{g_0 r}{R} \vec{u}_r$ où g_0 est une constante.

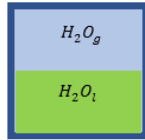
Déterminer l'expression de la pression dans le soleil. On note $P(r = R) = 0$.

On donne l'opérateur gradient en sphérique :

$$\vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : Courbe d'équilibre liquide-gaz du diagramme $P(T)$ de l'eau

On considère 1 mole d'eau (donc un corps pur) liquide en équilibre entre deux phases (ici liquide-gaz).



$$H_2O_{(l)} = H_2O_{(g)}$$

Initialement, l'eau est entièrement sous forme liquide.

- 1) Proposer un tableau d'avancement, on note ξ l'avancement.

On assure une température T et une pression P constantes et on note P^0 la pression standard, $\mu_l^{*0}(T)$ le potentiel dans l'état standard de la phase liquide (qui est pure) et $\mu_g^{*0}(T)$ le potentiel dans l'état standard de la phase gazeuse (qui est pure également).

- 2) Donner l'expression du potentiel μ_l^* de la phase liquide (idéale).
- 3) Donner l'expression du potentiel μ_g^* de la phase gazeuse en fonction de sa pression P .
- 4) Exprimer l'enthalpie libre G du système en utilisant les résultats précédents.
- 5) Calculer $\left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{T,P}$
- 6) Vérifier que l'on a bien $\Delta_r G = \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{T,P}$ sachant que $\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$
- 7) Ecrire la condition d'équilibre entre les deux phases à T et P fixées.
- 8) Si on fixe la température, la pression de cet équilibre est-elle unique ? Justifier.

Pour les deux phases, on peut écrire :

$$\begin{cases} G_l = n_l \mu_l^* \\ G_g = n_g \mu_g^* \end{cases}$$

Si on calcule la différentielle :

$$\begin{cases} V_l dP - S_l dT + \mu_l^* dn_l = \mu_l^* dn_l + n_l d\mu_l^* \\ V_g dP - S_g dT + \mu_g^* dn_g = \mu_g^* dn_g + n_g d\mu_g^* \end{cases}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} d\mu_l^* = V_{l,m} dP - S_{l,m} dT \\ d\mu_g^* = V_{g,m} dP - S_{g,m} dT \end{cases}$$

Où :

$$\begin{cases} V_{l,m}: \text{volume molaire de la phase liquide} \\ V_{g,m}: \text{volume molaire de la phase gazeuse} \\ S_{l,m}: \text{entropie molaire de la phase liquide} \\ S_{g,m}: \text{entropie molaire de la phase gazeuse} \end{cases}$$

- 9) Montrer que la pente de la courbe $P(T)$ qui traduit en tout point l'équilibre entre les deux phases s'écrit :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H_{vap,m}}{(V_{g,m} - V_{l,m})T}$$

Où $\Delta H_{vap,m}$ est l'enthalpie molaire de vaporisation

- 10) Justifier que l'on puisse écrire

$$\frac{dP}{P} \approx \frac{\Delta H_{vap,m}}{RT^2} dT$$

- 11) Si on travaille dans un domaine limité pour lequel $\Delta H_{vap,m}$ est une constante, montrer que $P(T)$ est une fonction croissante de T .

- 12) Estimer la pression à laquelle l'eau peut passer de l'état liquide à l'état vapeur à 300K. On donne $\Delta H_{vap,m} = 40,657 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

1) On peut proposer le tableau suivant :

Réaction		$H_2O_{(l)} = H_2O_{(g)}$	
Etat initial	$\xi_i = 0$	1	0
Etat intermédiaire	ξ	$1 - \xi$	ξ
Etat équilibre	ξ_{eq}	$1 - \xi_{eq}$	ξ_{eq}

- 2) Le liquide est seul dans sa phase : $\mu_l = \mu_l^0(T)$

- 3) La phase gazeuse est à une pression P , donc :

$$\mu_g = \mu_g^0(T) + RT \ln \left(\frac{P}{P^0} \right)$$

- 4) Donc $G = \sum n_i \mu_i = (1 - \xi) \mu_l(T) + \xi \mu_g(T, P)$

- 5) $\left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{T,P} = \mu_g(T, P) - \mu_l(T)$

- 6) On a bien $\Delta_r G = \sum \nu_i \mu_i = \mu_g - \mu_l$

Résultat tout à fait logique mais qui nous rappelle l'importance de l'enthalpie libre de réaction pour repérer l'équilibre et le sens d'évolution.

On a simplement vérifié que :

$$dG = VdP - SdT + \sum \left. \frac{\partial G}{\partial n_i} \right|_{T,P,n_j \neq n_i} dn_i$$

A T, P constant :

$$dG = \sum \left. \frac{\partial G}{\partial n_i} \right|_{T,P,n_j \neq n_i} dn_i = \sum \mu_i dn_i$$

$$= \sum \nu_i \mu_i d\xi$$

$$dG = \sum \nu_i \mu_i d\xi = \Delta_r G d\xi = \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{T,P} d\xi$$

7) A l'équilibre $\left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{T,P} d\xi = 0 \Rightarrow \Delta_r G = 0$

soit un équilibre associé à l'égalité des potentielle chimique : $\mu_g = \mu_l$

8) L'égalité précédente revient à écrire :

$$\mu_g^0(T) + RT \ln\left(\frac{P}{P^0}\right) = \mu_l^0(T)$$

Donc si on fixe T on fixe la valeur de ln et donc une unique valeur de P est possible.

Cela signifie que dans un diagramme P(T), les situations diphasiques ne se rencontre que sur les courbes d'équilibre physique

9) Si on se déplace sur la courbe d'équilibre alors on doit assurer l'égalité des potentiels donc :

$$\mu_l(T + dT, P + dP) = \mu_l(T, P) + d\mu_l$$

$$\mu_g(T + dT, P + dP) = \mu_g(T, P) + d\mu_g$$

$$d\mu_l = d\mu_g$$

$$V_{l,m} dP - S_{l,m} dT = V_{g,m} dP - S_{g,m} dT$$

$$dP = \frac{(S_{l,m} - S_{g,m}) dT}{V_{l,m} - V_{g,m}}$$

Si on opère un changement d'état à T, P fixé, alors le transfert thermique est mesuré par l'enthalpie et en considérant un chemin réversible alors

$$(S_{l,m} - S_{g,m}) = -\Delta H_{vap,m}/T$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H_{vap,m}}{(V_{g,m} - V_{l,m})T}$$

10) Pour un changement d'état liquide gaz

$$\text{on } V_{g,m} \gg V_{l,m} \text{ et } V_{g,m} = \frac{RT}{P}$$

Donc :

$$\frac{dP}{P} \approx \frac{\Delta H_{vap,m}}{RT^2} dT$$

11) $\frac{d \ln(P)}{dT} = \frac{\Delta H_{vap,m}}{RT^2} > 0$

12) Avec une intégration : $\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) =$

$$\frac{\Delta H_{vap,m}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \text{ avec les couples } (P_1 = 1 \text{ bar}, T_1 = 373 \text{ K}); (T_2 = 300 \text{ K})$$

$$P_2 = P_1 \exp\left(\frac{\Delta H_{vap,m}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right) = 4116 \text{ Pa}$$

Une pression de vaporisation plus faible pour une température de changement d'état plus faible également.

Activité 8 : Réflexion sur un conducteur réel

On considère la propagation d'une onde électromagnétique du spectre visible dans un conducteur réel pour lequel la conductivité $\gamma \approx 10^8 S/m$ sera considérée comme constante et réelle. Le conducteur occupe le demi-espace $z > 0$. On donne la constante diélectrique du vide $\epsilon_0 \approx 10^{-11} F/m$.

1) A l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss et de l'équation de conservation de la charge, montrer qu'une accumulation de charge en volume au sein d'un conducteur n'est observable que très « brièvement ».

Dans la suite, nous pourrions considérer le milieu conducteur comme électriquement neutre.

2) Ecrire l'équation de Maxwell-Ampère et montrer que le courant de déplacement est négligeable dans nos conditions de travail.

3) Montrer alors que l'équation de propagation du champ électrique dans le conducteur est du type $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Montrer que le champ magnétique vérifie le même type d'équation.

4) On considère la propagation d'un champ électrique de la forme $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ avec \underline{k} a priori complexe pour traduire l'absorption de l'onde.

- Montrer que $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$ où l'on précisera l'expression de δ en fonction des données du sujet.
- Montrer que le champ électrique est une onde amortie sur une distance caractéristique que l'on précisera.
- Donner l'expression du champ magnétique associé.
- En déduire l'expression du vecteur de Poynting moyen. Calculer la distance caractéristique de pénétration de l'énergie.

On obtient $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$ avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma_0} \approx 10^{-19} s$. Ce temps est à comparer avec la période de l'onde $T \approx 0,5 \times 10^{-15} s$. Ainsi, nous pourrions considérer le milieu comme globalement neutre en présence de l'onde.

De même, dans le domaine visible : $\left\| \frac{\mu_0 \gamma_0 \vec{E}}{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \right\| \approx \frac{\gamma_0}{\epsilon_0 \omega} \approx 10^5$ donc $\overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E}$

Donc : $\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{E}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ donne $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

De même $\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{B}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}$ donne aussi $\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

En injectant $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ dans l'équation de propagation, on obtient $k^2 = -j\mu_0 \gamma_0 \omega$ et donc $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$ en posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ et donc $\vec{E} = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) \vec{u}_x$ et donc avec Maxwell Faraday (il est plus prudent d'utiliser cette relation car il ne s'agit pas d'une OemPPPH mais d'une pseudo-OemPPH : $\overline{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_0 e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta})) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta})) (1+i) \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \vec{B} = \frac{E_0 e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta}))}{\delta i \omega} (1+i) \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0 e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta}))}{\delta \omega} (1-i) \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0 e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta}))}{\delta \omega} \sqrt{2} \exp(-\frac{i\pi}{4}) \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2} E_0}{\omega \delta} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}) \vec{u}_y$$

On peut quand même faire le calcul suivant :

$$\vec{B} = \frac{\underline{k} \vec{u}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k E}{\omega} \vec{u}_y = \frac{\sqrt{2} E_0}{\omega \delta} \exp(i(\omega t - \underline{k}z - \frac{\pi}{4})) \vec{u}_y$$

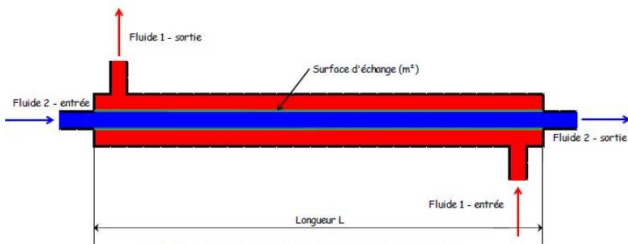
$$\text{soit } \vec{B} = \frac{\sqrt{2} E_0}{\omega \delta} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}) \vec{u}_y.$$

On obtient alors le vecteur de Poynting moyen :

$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega \delta} e^{-2z/\delta} \vec{u}_z$ ainsi l'énergie est atténuée sur une distance $\delta/2 \approx 5nm$ et est en moyenne non nulle (ce qui traduit bien la propagation d'une onde atténuée)

Exercice 9 : Echangeur thermique

On considère un échangeur thermique à contre-sens. Les deux fluides en écoulement sont de l'eau de capacité thermique massique c :



Le fluide 2 circule dans une conduite cylindrique de conductance thermique linéique G_l . Ce fluide 2 rentre à la température T_{2e} et ressort à la température T_{2s} . Ce fluide 1 rentre à la température T_{1e} et ressort à la température T_{1s} . Le fluide 1 échange de la chaleur qu'avec le fluide 2. Les deux fluides s'écoulent avec un débit massique D_{m1} et D_{m2} et on suppose le régime stationnaire atteint.

- 1) Faire un bilan local de puissance du fluide 1 et obtenir une équation différentielle traduisant ce bilan.
- 2) Faire un bilan local de puissance du fluide 2 et obtenir une équation différentielle traduisant ce bilan.

3) Montrer que :
$$\begin{cases} \frac{dT_1(x)}{dx} + \frac{T_1(x) - T_2(x)}{\delta_1} = 0 \\ \frac{dT_2(x)}{dx} + \frac{T_1(x) - T_2(x)}{\delta_2} = 0 \end{cases}$$

- 4) Obtenir l'expression de $T_{2,s}$ (température du fluide 2 en sortie)

Exercice : Echangeur thermique

$$D_{m1}c(T_1(x+dx) - T_1(x)) = -G_l dx(T_1(x) - T_2(x))$$

$$D_{m2}c(T_2(x) - T_2(x+dx)) = G_l dx(T_1(x) - T_2(x))$$

$$D_{m1}c \frac{dT_1(x)}{dx} = -G_l(T_1(x) - T_2(x))$$

$$-D_{m2}c \frac{dT_2(x)}{dx} = -G_l(T_2(x) - T_1(x))$$

On pose $\delta_1 = \frac{D_{m1}c}{G_l}$ et $\delta_2 = \frac{D_{m2}c}{G_l}$

$$\frac{dT_1(x)}{dx} + \frac{T_1(x) - T_2(x)}{\delta_1} = 0$$

$$\frac{dT_2(x)}{dx} + \frac{T_1(x) - T_2(x)}{\delta_2} = 0$$

Avec deux débits différents : $\frac{d(T_1(x) - T_2(x))}{dx} + \frac{T_1(x) - T_2(x)}{\delta_{eq}} = 0$

Avec : $\frac{1}{\delta_{eq}} = \frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta_2}$

On obtient : $T_1(x) - T_2(x) = Ae^{-\frac{x}{\delta_{eq}}} = (T_{1s} - T_{2e})e^{-\frac{x}{\delta_{eq}}}$

$$T_{1e} - T_{2s} = (T_{1s} - T_{2e})e^{-\frac{L}{\delta_{eq}}}$$

Donc : $T_{2s} = T_{1e} - (T_{1s} - T_{2e})e^{-\frac{L}{\delta_{eq}}}$