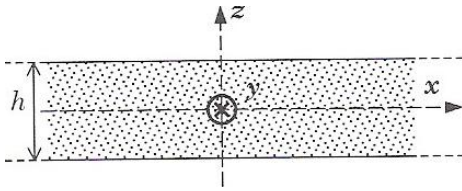


Exercice 1 : électrostatique

Soit une plaque d'épaisseur h chargée en volume avec une densité ρ supposée uniforme. La plaque est supposée infinie suivant Ox et Oy et le repérage est tel que xOy est un plan de symétrie de la distribution de charges.



- Déterminer, en justifiant votre démarche, la direction du champ électrique en un point M quelconque. Mener également étude des invariances du champ électrique.
- Déterminer le champ électrique en utilisant le théorème de Gauss.
- Retrouver l'expression du champ électrique en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss.
- En déduire l'évolution du potentiel électrostatique si $V(z = 0) = 0$.

Exercice 1 : électrostatique

a) Le champ électrique est $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$

$$b) \begin{cases} |z| \leq \frac{h}{2} : 2Es = \frac{2\rho Sz}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z \\ z \geq \frac{h}{2} : 2Es = \frac{\rho Sh}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \\ z \leq -\frac{h}{2} : \vec{E} = -\frac{\rho h}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} |z| \leq \frac{h}{2} : \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z \\ z \geq \frac{h}{2} : \frac{dE}{dz} = 0 \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \\ z \leq -\frac{h}{2} : \frac{dE}{dz} = 0 \rightarrow \vec{E} = -\frac{\rho h}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z| \leq \frac{h}{2} : V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} \\ z \geq \frac{h}{2} : V = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} \left(\frac{h}{4} - z \right) \\ z \leq -\frac{h}{2} : V = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} \left(-\frac{h}{4} + z \right) \end{cases}$$

Exercice 2 : Magnétostatique

On étudie une distribution de courant caractérisée par le vecteur densité de courant $\vec{j}(x, y, z)$ suivant (j_0 et a sont des constantes):

$$\begin{cases} |z| < a : \vec{j}(x, y, z) = j_0 \vec{u}_x \\ |z| \geq a : \vec{j}(x, y, z) = \vec{0} \end{cases}$$

- Déterminer, en justifiant votre démarche, la direction du champ magnétique en un point M quelconque.
- Déterminer le champ magnétique en utilisant le théorème d'Ampère.
- Retrouver l'expression du champ magnétique en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère

Exercice 2 : Magnétostatique

a) Le champ magnétique est $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_y$

$$b) \begin{cases} |z| \leq a : -2Bl = \mu_0 2jz l \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 jz \vec{u}_z \\ z \geq a : -2Bl = \mu_0 2jal \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 ja \vec{u}_z \\ z \leq -a : \vec{E} = \vec{B} = \mu_0 ja \vec{u}_z \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} |z| \leq a : -\frac{dB}{dz} = \mu_0 j \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 jz \vec{u}_z \\ z \geq a : \frac{dB}{dz} = 0 \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 ja \vec{u}_z \\ z \leq -a : \frac{dB}{dz} = 0 \rightarrow \vec{B} = \mu_0 ja \vec{u}_z \end{cases}$$

Exercice 3 : Cinétique et Thermodynamique chimie

On considère la réaction d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $C_a = 1\text{mol.L}^{-1}$, de volume $V_a = 0,25\text{L}$ avec de la soude de concentration $C_b = 1\text{mol.L}^{-1}$ et de volume $V_b = 0.25\text{L}$ dans un calorimètre parfaitement calorifugé. L'ensemble {solution-réacteur} est de capacité thermique équivalente $C = 4185\text{J.K}^{-1}$. Dans la suite on se place dans l'approximation d'Ellingham.

- 1) Ecrire la réaction observée puis rappeler la valeur de sa constante d'équilibre à 298K.
- 2) Après avoir établi un tableau d'avancement, donc la valeur de l'avancement de cette réaction.
- 3) A l'aide d'un thermomètre, on mesure une température initiale de 298°K et une température finale de 301,5°K au bout de quelques secondes. Proposer un cycle de Hess et en déduire la valeur de l'enthalpie de réaction $\Delta_r H^0$

On suppose la cinétique d'ordre 1 par rapport à chacun de deux réactifs (ordre global égale à 2). On considère également que la température T impacte la constante cinétique $k(T)$ qui suit la loi d'Arrhenius : $k(T) = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$ avec E_a l'énergie d'activation et où :

$$\begin{cases} A = 5\text{L.mol}^{-1}\text{s}^{-1} \\ E_a = 1\text{kJ.mol}^{-1} \\ R = 8.314\text{J.K}^{-1}\text{mol}^{-1} \end{cases}$$

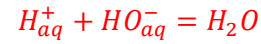
- 4) Montrer que la concentration $[H_{aq}^+]$ vérifie une équation différentielle telle que $\frac{d[H_{aq}^+]}{dt} = f([H_{aq}^+], T)$
On donnera l'expression de la fonction $f([H_{aq}^+], T)$
- 5) Montrer qu'un schéma d'Euler explicite aboutit au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} [H_{aq}^+]_{i+1} = [H_{aq}^+]_i + T_e * A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_i}\right) [H_{aq}^+]_i^2 \\ X_e = ([H_{aq}^+]_i - [H_{aq}^+]_{i+1})(V_a + V_b) \\ T_{i+1} = T_i - \frac{\Delta_r H^0 X_e}{C} \end{cases}$$

En notant X_e le pas de l'avancement entre deux instants successifs : $t_{i+1} = t_i + T_e$

- 6) Faire une simulation numérique de la situation pendant 60s à 298K et apporter des commentaires.

La réaction est :



La constante d'équilibre associée est $K = 10^{14}$

La réaction est donc quantitative et l'avancement est donc égale à :

$$\xi_f = 0.25\text{mol}$$

On a alors : $\Delta_r H^0 \xi_e = -C(T_f - T_i)$

$$\text{Soit } \Delta_r H^0 = -\frac{C\Delta T}{\xi_e} = -4185 * \frac{3,5}{0,25} = -59\text{kJ.mol}^{-1}$$

L'étude cinétique abouti alors à :

$$v = -\frac{d[H^+]}{dt} = k[H^+]^2 = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) [H^+]^2$$

Donc avec une formule de différence finie et un schéma d'Euler explicite :

$$[H^+]_{i+1} = [H^+]_i + T_e * A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_i}\right) [H^+]_i^2$$

Si on différencie la relation $\Delta_r H^0 \xi_e = -C(T_f - T_i)$ alors :

$$\Delta_r H^0 d\xi = -C dT$$

$$\text{Numériquement : } T_{i+1} = T_i - \frac{\Delta_r H^0 X_e}{C}$$

En notant X_e le pas de l'avancement

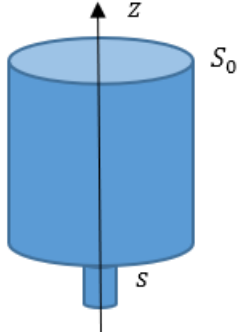
$$\text{Et chimiquement } \frac{[H_{aq}^+]_{i+1}}{V_a + V_b} = \frac{[H_{aq}^+]_i}{V_a + V_b} - X_e$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
k0=5
C=2000
Ea=1000
R=8.314
Va=Vb=0.25
Ca=1
tab_t=np.arange(0,10,0.01)
Te=0.01
H=np.ones(len(tab_t))*Ca*Va/(Va+Vb)
T=np.ones(len(tab_t))*298
delta_H=-56000
for i in range(len(tab_t)-1):
    H[i+1]=H[i]-H[i]**2*k0*Te*np.exp(-Ea/(R*T[i]))
    Xe=(H[i]-H[i+1])*(Va+Vb)
    T[i+1]=T[i]-delta_H*Xe/C
```

On a une température finale théorique de 301,5K.

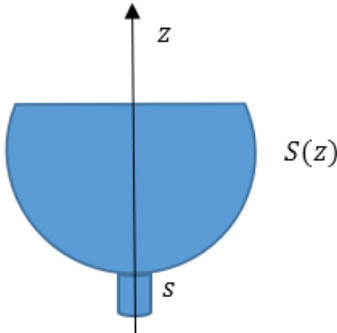
Exercice 4 : Mécanique des fluides

Un récipient, à symétrie de révolution autour de l'axe Oz , de section horizontale S , se vidange à travers un orifice O de très faible section s percé au fond. L'intensité de champ de pesanteur est $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



- 1) Exprimer l'équation différentielle vérifiée par la variation de l'altitude $\frac{dz}{dt}$ du niveau de l'eau
- 2) On suppose que $S = S_0$ est une constante et qu'une hauteur $h = 20 \text{ cm}$ d'eau est initialement présente. Déterminer la valeur du rapport $\frac{S}{s}$ assurant une vidange complète du réservoir en 10s

On suppose maintenant que $S(z) = S_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$ où S_0 et z_0 sont des constantes.



- 3) Déterminer la valeur de n qui permet d'avoir une hauteur de liquide $z(t)$ qui varie linéairement avec le temps

1) L'application de Bernoulli (dans un régime quasi-stationnaire) et l'hypothèse d'un fluide incompressible $-\frac{dz}{dt} = \frac{s}{S} \sqrt{2gz}$

2) Si $S = cte$ alors $\int_h^0 z^{-\frac{1}{2}} dz = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} \int_0^\tau dt$

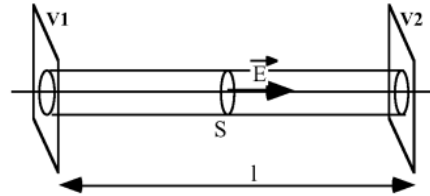
$$\frac{\tau}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{S}{s} = 50$$

3) Si $S(z) = S_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$, $-\frac{dz}{dt} = \frac{s}{S_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^n} \sqrt{2gz} =$

$$Cte \rightarrow n = \frac{1}{2}$$

Exercice 5 : Bilan d'énergie

Soit un conducteur de section S , de rayon R , de longueur l , de conductivité γ siège d'un courant d'intensité I sous l'action d'un champ électrique \vec{E} uniforme et associé à la différence de potentiel $V_1 - V_2 = U$. On néglige les effets de bords en supposant $l \gg R$ et le régime est stationnaire.



Déterminer :

- Le champ magnétostatique
- L'expression du vecteur de Poynting
- La puissance rentrant à travers les parois du conducteur

- Le champ magnétostatique : En dehors de la structure $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

- L'expression du vecteur de Poynting : $\vec{\pi} = -\frac{EB}{\mu_0} \vec{u}_r$

- La puissance rentrant à travers les parois du conducteur

$$P = \frac{EB}{\mu_0} l 2\pi R = EIl = UI$$

Exercice 6 : Statique des fluides

On assimile le soleil à un fluide statique, incompressible de masse volumique ρ occupant une sphère de rayon R . Dans cette sphère, le champ de pesanteur est radial et vaut $\vec{g} = -\frac{g_0 r}{R} \vec{u}_r$ où g_0 est une constante.

Déterminer l'expression de la pression dans le soleil. On note $P(r = R) = 0$.

On donne l'opérateur gradient en sphérique :

$$\vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

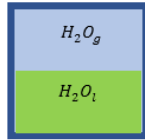
On rappelle la loi de la statique des fluides :

$$\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho g_0}{R} r \rightarrow P(r) = \frac{\rho g_0}{2R} (R^2 - r^2)$$

Exercice 7 : Courbe d'équilibre liquide-gaz du diagramme $P(T)$ de l'eau

On considère 1 mole d'eau (donc un corps pur) en équilibre entre ses phases liquide et gaz.



$$H_2O_{(l)} = H_2O_{(g)}$$

Initialement, l'eau est entièrement sous forme liquide.

- 1) Proposer un tableau d'avancement lors du changement d'état, on note ξ l'avancement.

On assure une température T et une pression P constantes et on note P^0 la pression standard, $\mu_l^{ref,0}(T)$ le potentiel dans l'état standard de référence de la phase liquide (liquide seul dans sa phase à la pression P^0) et $\mu_g^{ref,0}(T)$ le potentiel dans l'état standard de référence de la phase gazeuse (gaz parfait seul dans sa phase à P^0).

- 2) Donner l'expression du potentiel μ_l^* de la phase liquide (le liquide est ici une phase condensée idéale).
- 3) Donner l'expression du potentiel μ_g^* de la phase gazeuse en fonction de sa pression P .
- 4) Exprimer l'enthalpie libre G du système en utilisant les résultats précédents.
- 5) Calculer $\left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{T,P}$
- 6) Vérifier que l'on a bien $\Delta_r G = \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{T,P}$
sachant que $\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$
- 7) Ecrire la condition d'équilibre entre les deux phases à T et P fixées.
- 8) Si on fixe la température, la pression de cet équilibre est-elle unique ? Justifier.

Pour les deux phases, on peut écrire :

$$\begin{cases} G_l(T, P) = n_l \mu_l^*(T, P) \\ G_g(T, P) = n_g \mu_g^*(T, P) \end{cases}$$

Si on calcule la différentielle :

$$\begin{cases} dG_g = V_g dP - S_g dT \\ dG_l = V_l dP - S_l dT \end{cases}$$

Entre deux points à l'équilibre le long de la courbe de saturation : $\{T, P\} \rightarrow \{T + dT, P + dP\}$

$$\begin{cases} d\mu_l^* = V_{l,m} dP - S_{l,m} dT \\ d\mu_g^* = V_{g,m} dP - S_{g,m} dT \end{cases}$$

Où :

$$\begin{cases} V_{l,m}: \text{volume molaire de la phase liquide} \\ V_{g,m}: \text{volume molaire de la phase gazeuse} \\ S_{l,m}: \text{entropie molaire de la phase liquide} \\ S_{g,m}: \text{entropie molaire de la phase gazeuse} \end{cases}$$

- 9) Montrer que la pente de la courbe $P(T)$ qui traduit en tout point l'équilibre entre les deux phases s'écrit :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H_{vap,m}}{(V_{g,m} - V_{l,m})T}$$

Où $\Delta H_{vap,m}$ est l'enthalpie molaire de vaporisation

- 10) Justifier que l'on puisse écrire $\frac{dP}{P} \approx \frac{\Delta H_{vap,m}}{RT^2} dT$
- 11) Si on travaille dans un domaine limité pour lequel $\Delta H_{vap,m}$ est une constante, montrer que $P(T)$ est une fonction croissante de T .
- 12) Estimer la pression à laquelle l'eau peut passer de l'état liquide à l'état vapeur à 300K. On donne $\Delta H_{vap,m} = 40,657 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

1) On peut proposer le tableau suivant :

Réaction		$H_2O_{(l)} = H_2O_{(g)}$	
Etat initial	$\xi_i = 0$	1	0
Etat intermédiaire	ξ	$1 - \xi$	ξ
Etat équilibre	ξ_{eq}	$1 - \xi_{eq}$	ξ_{eq}

- 2) Le liquide est seul dans sa phase : $\mu_l = \mu_l^{ref,0}(T)$
 3) La phase gazeuse est à une pression P , donc :

$$\mu_g = \mu_g^{ref,0}(T) + RT \ln\left(\frac{P}{P^0}\right)$$

4) Donc $G = \sum n_i \mu_i = (1 - \xi)\mu_l(T) + \xi\mu_g(T, P)$

5) $\left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{T,P} = \mu_g(T, P) - \mu_l(T)$

6) On a bien $\Delta_r G = \sum \nu_i \mu_i = \mu_g - \mu_l$

Résultat tout à fait logique mais qui nous rappelle l'importance de l'enthalpie libre de réaction pour repérer l'équilibre et le sens d'évolution.

On a simplement vérifié que :

$$dG(n_i, T, P) = \left.\frac{\partial G}{\partial P}\right|_{T, n_i} dP + \left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_{P, n_i} dT + \sum \left.\frac{\partial G}{\partial n_i}\right|_{T, P, n_j \neq n_i} dn_i$$

$A T, P \text{ constant} :$

$$dG = \sum \left.\frac{\partial G}{\partial n_i}\right|_{T, P, n_j \neq n_i} dn_i = \sum \mu_i dn_i = \sum \nu_i \mu_i d\xi$$

$$dG = \sum \nu_i \mu_i d\xi = \Delta_r G d\xi = \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{T, P} d\xi$$

- 7) A l'équilibre $\left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{T, P} d\xi = 0 \Rightarrow \Delta_r G = 0$
 soit un équilibre associé à l'égalité des potentielle chimique : $\mu_g = \mu_l$

8) L'égalité précédente revient à écrire :

$$\mu_g^0(T) + RT \ln\left(\frac{P}{P^0}\right) = \mu_l^0(T)$$

Donc si on fixe T on fixe la valeur de \ln et donc une unique valeur de P est possible. Cela signifie que dans un diagramme $P(T)$, les situations diphasiques ne se rencontre que sur les courbes d'équilibre physique.

- 9) Si on se déplace sur la courbe d'équilibre alors on doit assurer l'égalité des potentiels donc :

$$\begin{aligned} \mu_l(T + dT, P + dP) &= \mu_l(T, P) + d\mu_l \\ \mu_g(T + dT, P + dP) &= \mu_g(T, P) + d\mu_g \\ d\mu_l &= d\mu_g \\ V_{l,m} dP - S_{l,m} dT &= V_{g,m} dP - S_{g,m} dT \\ dP &= \frac{(S_{l,m} - S_{g,m}) dT}{V_{l,m} - V_{g,m}} \end{aligned}$$

Si on opère un changement d'état à T, P fixé, alors le transfert thermique est mesuré par l'enthalpie et en considérant un chemin réversible alors :

$$\begin{aligned} (S_{l,m} - S_{g,m}) &= -\Delta H_{vap,m}/T \\ \frac{dP}{dT} &= \frac{\Delta H_{vap,m}}{(V_{g,m} - V_{l,m})T} \end{aligned}$$

10) Pour un changement d'état liquide gaz on $V_{g,m} \gg V_{l,m}$ et $V_{g,m} = \frac{RT}{P}$

Donc :

$$\frac{dP}{P} \approx \frac{\Delta H_{vap,m}}{RT^2} dT$$

11) $\frac{d \ln(P)}{dT} = \frac{\Delta H_{vap,m}}{RT^2} > 0$

12) Avec une intégration : $\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) =$

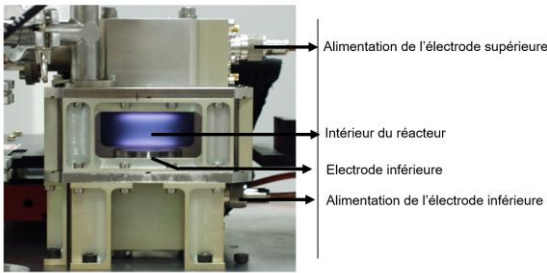
$$\frac{\Delta H_{vap,m}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \text{ avec les couples } (P_1 = 1 \text{ bar}, T_1 = 373 \text{ K}); (T_2 = 300 \text{ K})$$

$$P_2 = P_1 \exp\left(\frac{\Delta H_{vap,m}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right) = 4116 \text{ Pa}$$

Une pression de vaporisation plus faible pour une température de changement d'état plus faible également.

Exercice 8 : problème de Laplace

Au laboratoire du GREMI d'Orléans, on utilise un réacteur assimilable à deux électrodes planes et parallèles afin de générer des plasmas de laboratoire.



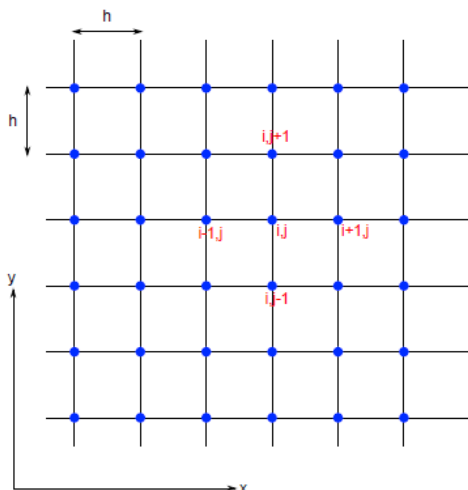
L'électrode inférieure est chargée au potentiel $V_p = 400V$ et l'électrode supérieure au potentiel $-V_p$. Le milieu entre les électrodes est encore assimilable à du vide.

- 1) Montrer que le potentiel électrostatique $V(M)$ entre les électrodes doit vérifier l'équation $\Delta V = 0$ (appelée équation de Laplace)

On ramène ce problème à deux dimensions dans le plan P vertical médiateur du réacteur carré de côté $a = 20cm$ et on suppose $V(x, y)$. Dans ces conditions, l'équation de Laplace devient :

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

On va utiliser un maillage de P , de pas $h = \frac{a}{N-1}$ avec $N \times N$ le nombre de points du maillage (discrétisation identique dans les deux directions de l'espace). Un point M est alors repéré par $[x_i = ih, y_j = jh]$ et sera identifié plus simplement par le couple $[i, j]$.



Le potentiel en M est alors noté $V(M) = V[x_i, y_j] = V[i, j]$.

- 2) En utilisant la formule de différence finie centrée pour approximer les dérivées secondes, montrer que :

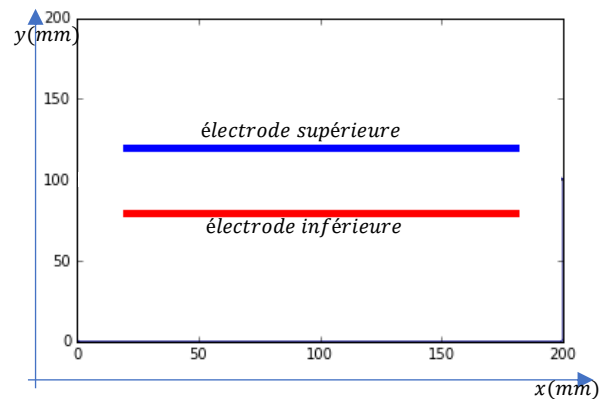
$$V[i, j] = \frac{V[i+1, j] + V[i-1, j] + V[i, j+1] + V[i, j-1]}{4} \quad (\text{Éq 1})$$

La solution (unique) de ce problème doit aussi vérifier les conditions aux limites imposées au potentiel par l'expérimentateur (conditions de Dirichlet). Ces conditions imposées au potentiel sont :

- $\pm V_p$ aux électrodes
- $V = 0$ sur les parois du réacteur

Les lignes de codes ci-dessous initialisent le programme :

```
N=200#nombre de lignes
M=200#nombre de colonnes
Vp=400#potentiel en Volt
V1=np.zeros((N,M))
V1[80,20:180]=Vp
V1[120,20:180]=-Vp
plt.plot([20,180], [80,80], 'r-', lw = 5) # plaque inf
plt.plot([20,180], [120,120], 'b-', lw = 5) # plaque sup
```



Pour résoudre ce problème, on va utiliser une méthode itérative (méthode de Jacobi). A partir du tableau initial $V1$, on calcule une nouvelle valeur du potentiel pour tous les points à l'aide de l'équation 1 en maintenant les conditions aux limites. Le processus est ensuite répété jusqu'à obtenir des valeurs de potentiels stables. Au bout de k itérations, on a un potentiel $V_k[i, j]$ et le calcul est stoppé à l'aide d'un critère de convergence :

$$\varepsilon = \max |V_k[i, j] - V_{k-1}[i, j]| < \varepsilon_c$$

Où ε_c est un seuil de convergence.

On donne ci-dessous, le programme python permettant de réaliser cette méthode itérative et utilisant deux boucles « for ».

```

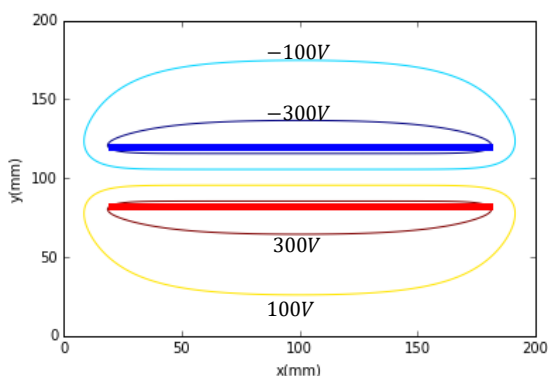
"""itération sans vectorisation"""
V2=V1.copy0#pour éviter les effets de bords
!!!essentiel pour la 1e comparaison
epsilon =0.01#seuil de convergence
ecart = 1#initialisation
while ecart>epsilon:
    for i in range (1,N-1):
        for j in range (1,N-1):
            V2[i,j]=0.25*(V1[i-1,j]+V1[i+1,j]+V1[i,j-1]+V1[i,j+1])
            V2[80,20:180]=Vp #on impose à chaque
itération les conditions aux limites
            V2[120,20:180]=-Vp
            ecart = np.max(abs(V2[:,j]-V1[:,j]))
            V1=V2.copy0 #permet de comparer V entre
deux itérations

```

Ce programme se termine au bout de 858s (sur mon ordinateur) après 5547 itérations !!!

- 3) Python est un langage interprété qui n'est pas mis en valeur avec des programmes utilisant des boucles for pour calculer des tableaux. Réécrire le programme précédent en proposant une version vectorisée (sans les deux boucles for) et permettant alors d'obtenir plus rapidement le tableau numpy V2.

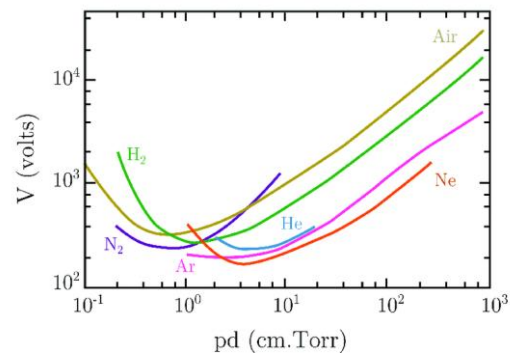
A l'issue de la simulation (en 3s avec vectorisation !!!!), il est possible d'obtenir le tracé de quelques équipotentielles dans le réacteur. Le pas qui a été choisi pour la simulation est $h \approx 1mm$:



- 4) Peut-on négliger les effets de bords dans la région inter-électrode (assimilable à du vide) et supposer le champ uniforme ? Justifier.

On donne ci-dessous le graphe représentant la loi de Paschen donnant la tension V à appliquer

entre deux électrodes distantes de $d(cm)$ en fonction du produit pd où p est la pression du gaz en Torr ($1Torr = 133Pa$)



- 5) A partir de quelle valeur de pression en Pa n'est-il plus possible d'ioniser un gaz d'argon ?

La physique impose dans un milieu vide de charge et en régime stationnaire : $div\vec{E} = 0$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

Soit $\Delta V = 0$. Donc, pour ce problème à deux dimensions :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Avec la formule des différences finie centrée :

$$\frac{\partial V}{\partial x} \equiv \frac{V[i][j] - V[i-1][j]}{h}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \equiv \frac{(V[i+1][j] - V[i][j]) - (V[i][j] - V[i-1][j])}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \equiv \frac{(V[i][j+1] - V[i][j]) - (V[i][j] - V[i][j-1])}{h^2}$$

$$V[i][j] = \frac{V[i+1][j] + V[i-1][j] + V[i][j+1] + V[i][j-1]}{4}$$

```

"""itération avec vectorisation"""
V2=V1.copy0#pour éviter les effets de bords
!!!essentiel pour la 1e comparaison
epsilon =0.01#seuil de convergence
ecart = 1#initialisation (affectation)
iteration = 0
t_debut=time.time0
while ecart>epsilon:
    iteration=iteration+1

```

```
V2[1:-1,1:-1]=0.25*(V1[:-2,1:-1]+V1[2:,1:-1]+V1[1:-1,-2]+V1[1:-1,2:])
```

```
V2[80,20:180]=Vp #on impose à chaque itération les conditions aux limites
```

```
V2[120,20:180]=-Vp
```

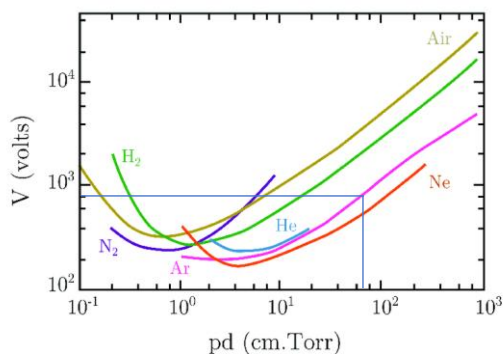
```
ecart = np.max(abs(V2[:,]-V1[:,]))
```

```
V1=V2.copy() #permet de comparer V entre deux itérations
```

Le champ est uniforme dans une grande partie de la région inter électrode car :

- Les équipotentielles y sont régulièrement espacées et parallèles
- Car les lignes de champ électrique y sont parallèles avec $\text{div}\vec{E} = 0$ et $\text{rot}\vec{E} = \vec{0}$ on est assuré d'avoir un champ électrique uniforme

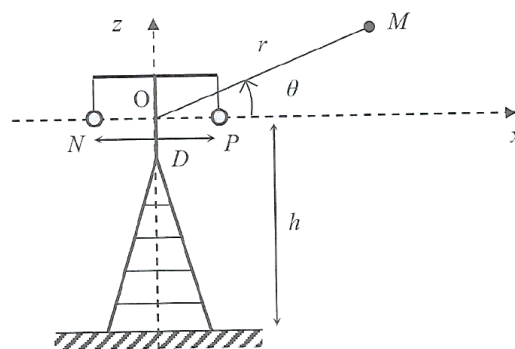
Avec $V = 800V$:



Donc : $pd = 70\text{cm.Torr}$ soit une pression maximale de $p_{max} = \frac{70 \cdot 133}{4}$

Exercice 9 : Du potentiel au champ électrique

Dans cet exercice, on va étudier l'intensité du champ électrique à proximité d'une ligne électrique très haute tension. La ligne ici décrite est constituée de deux câbles N et P cylindriques parallèles, supposés de longueurs infinies, de rayon R et séparés d'une distance $D \gg R$. On modélise la ligne d'un point de vue électrostatique et les tensions dans les deux câbles sont opposées. On note V_0 le potentiel du câble P . L'air est associé à une permittivité diélectrique identique à celle du vide et notée $\epsilon_0 \approx 10^{-11} F/m$.



Dans ces conditions le potentiel mesuré au point M est donné par :

$$V_{tot}(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \ln\left(\frac{NM}{PM}\right)$$

On repère maintenant un point M de l'espace par ses coordonnées polaires (r, θ) , l'origine O étant placé au milieu de N et P . L'approximation dipolaire consiste, en plus de $D \gg R$, à supposer que $r \gg D$.

On rappelle le DL à l'ordre 1 en $x \approx 0$ des fonctions suivantes :

- $(1+x)^n \approx 1+nx$
 - $\ln(1+x) \approx x$
- 1) Donner une expression approchée de $r_N = NM$ en fonction de D, r et θ en négligeant les infiniment petits d'ordre 2.
Aide : On pourra remarquer que $\vec{NM} = \vec{NO} + \vec{OM}$
 - 2) Donner une expression approchée de $r_P = PM$ à l'ordre 1 en fonction de D, r et θ .
 - 3) Montrer alors que le potentiel total est donné par : $V_{tot}(M) \approx \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \frac{D \cos \theta}{r}$.

On donne l'expression de l'opérateur gradient en repérage cylindrique :

$$\vec{\text{grad}}V(r, \theta) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

- 4) Donner l'expression de la composante radiale et ortho-radiale du champ électrique total en conservant les hypothèses de travail précédentes.
- 5) En déduire l'expression de la norme du champ électrique total.

On considère une ligne THT ayant les caractéristiques suivantes :

$$V_0 = 400kV, D = 3m, R = 3cm, h = 10m$$

Depuis mai 2001, un arrêté fixe les limites d'exposition du public aux champs électromagnétiques provoqués par le réseau d'alimentation électrique : *la position des ouvrages par rapport aux lieux normalement accessibles aux tiers doit être telle que le champ électrique résultant en ces lieux n'excède pas 5kV/m dans les conditions de fonctionnement en régime de service permanent.*

- 6) La ligne étudiée précédemment est-elle en accord avec la réglementation ? On prendra $\ln(10) \approx 2$.
- 7) Tracer quelques lignes de champ et équipotentielle.

Rq : On travaille en HT car pour une puissance utile donnée à une charge R :

$$P_u = UI = \frac{RU_{HT}}{R + R_{lign}} I = \frac{RU_{HT}}{R + R_{lign}} \left(\frac{P_{joule}}{R_{lign}} \right)^{1/2}$$

Donc $P_{joule} \propto \frac{1}{U_{HT}^2}$

$$1) \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} \text{ donc } r_p^2 = r^2 + \frac{D^2}{4} - rD \cos \theta \text{ et à l'ordre 1 : } r_p = r \left(1 - \frac{D}{2r} \cos \theta \right)$$

$$2) \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM} \text{ donc } r_N^2 = r^2 + \frac{D^2}{4} + rD \cos \theta \text{ et à l'ordre 1 : } r_N = r \left(1 + \frac{D}{2r} \cos \theta \right)$$

$$3) V_{tot}(M) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \ln\left(\frac{r_N}{r_p}\right) =$$

$$\frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \ln\left(\frac{\left(1 + \frac{D}{2r} \cos \theta\right)}{\left(1 - \frac{D}{2r} \cos \theta\right)}\right) \approx \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \left(\frac{D}{r} \cos \theta\right)$$

$$4) E_r = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \left(\frac{D}{r^2} \cos \theta\right) \text{ et } E_\theta =$$

$$\frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \left(\frac{D}{r^2} \sin \theta\right)$$

$$5) E = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \frac{D}{r^2}$$

$$6) E(h) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \frac{D}{h^2} \approx 3kV/m$$

Activité 10 : Réflexion sur un conducteur réel

On considère la propagation d'une onde électromagnétique du spectre visible dans un conducteur réel pour lequel la conductivité $\gamma \approx 10^8 S/m$ sera considérée comme constante et réelle. Le conducteur occupe le demi-espace $z > 0$. On donne la constante diélectrique du vide $\epsilon_0 \approx 10^{-11} F/m$.

- 1) A l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss et de l'équation de conservation de la charge, montrer qu'une accumulation de charge en volume au sein d'un conducteur n'est observable que très « brièvement ».

Dans la suite, nous pourrions considérer le milieu conducteur comme électriquement neutre.

- 2) Ecrire l'équation de Maxwell-Ampère et montrer que le courant de déplacement est négligeable dans nos conditions de travail.
- 3) Montrer alors que l'équation de propagation du champ électrique dans le conducteur est du type $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Montrer que le champ magnétique vérifie le même type d'équation.
- 4) On considère la propagation d'un champ électrique de la forme $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}z)) \vec{u}_x$ avec \underline{k} a priori complexe pour traduire l'absorption de l'onde.

a) Montrer que $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$ où l'on précisera l'expression de δ en fonction des données du sujet.

b) Montrer que le champ électrique est une onde amortie sur une distance caractéristique que l'on précisera.

c) Donner l'expression du champ magnétique associé.

d) En déduire l'expression du vecteur de Poynting moyen. Calculer la distance caractéristique de pénétration de l'énergie.

On obtient $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$ avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma_0} \approx 10^{-19} s$. Ce temps est à comparer avec la période de l'onde $T \approx 0,5 \times 10^{-15} s$. Ainsi, nous pourrions considérer le milieu comme globalement neutre en présence de l'onde.

De même, dans le domaine visible : $\left\| \frac{\mu_0 \gamma_0 \vec{E}}{\epsilon_0 \partial t} \right\| \approx$

$$\frac{\gamma_0}{\epsilon_0 \omega} \approx 10^5 \text{ donc } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E}$$

Donc : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ donne $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

De même $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}$ donne aussi $\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

En injectant $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ dans l'équation de propagation, on obtient $k^2 = -j\mu_0 \gamma_0 \omega$ et donc $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$ en posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ et donc $\vec{E} = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) \vec{u}_x$ et donc avec Maxwell Faraday (il est plus prudent d'utiliser cette relation car il ne s'agit pas d'une OemPPH mais d'une pseudo-OemPPH : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_0 e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta})) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta})) (1+i) \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{B} = \frac{E_0 e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta}))}{\delta i \omega} (1+i) \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0 e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta}))}{\delta \omega} (1-i) \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0 e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta}))}{\delta \omega} \sqrt{2} \exp(-\frac{i\pi}{4}) \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2} E_0}{\omega \delta} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}) \vec{u}_y$$

On peut quand même faire le calcul suivant :

$$\vec{B} = \frac{k \vec{u}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k E}{\omega} \vec{u}_y = \frac{\sqrt{2} E_0}{\omega \delta} \exp(i(\omega t - kz - \frac{\pi}{4})) \vec{u}_y$$

$$\text{soit } \vec{B} = \frac{\sqrt{2} E_0}{\omega \delta} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}) \vec{u}_y.$$

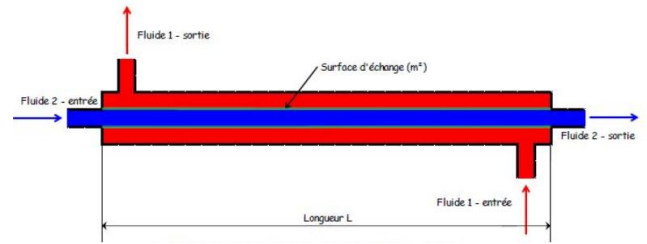
On obtient alors le vecteur de Poynting moyen :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega \delta} e^{-2z/\delta} \vec{u}_z \text{ ainsi l'énergie est atténuée}$$

sur une distance $\delta/2 \approx 5nm$ et est en moyenne non nulle (ce qui traduit bien la propagation d'une onde atténuée)

Exercice 11 : Echangeur thermique

On considère un échangeur thermique à contre-sens. Les deux fluides en écoulement sont de l'eau de capacité thermique massique c :



Le fluide 2 circule dans une conduite cylindrique de conductance thermique linéique G_l . Ce fluide 2 rentre à la température T_{2e} et ressort à la température T_{2s} . Ce fluide 1 rentre à la température T_{1e} et ressort à la température T_{1s} . Le fluide 1 échange de la chaleur qu'avec le fluide 2. Les deux fluides s'écoulent avec un débit massique D_{m1} et D_{m2} et on suppose le régime stationnaire atteint.

- 1) Faire un bilan local de puissance du fluide 1 et obtenir une équation différentielle traduisant ce bilan.
- 2) Faire un bilan local de puissance du fluide 2 et obtenir une équation différentielle traduisant ce bilan.
- 3) Montrer que :
$$\begin{cases} \frac{dT_1(x)}{dx} + \frac{T_1(x) - T_2(x)}{\delta_1} = 0 \\ \frac{dT_2(x)}{dx} + \frac{T_1(x) - T_2(x)}{\delta_2} = 0 \end{cases}$$
- 4) Obtenir l'expression de $T_{2,s}$ (température du fluide 2 en sortie)

Exercice 11 : Echangeur thermique

$$D_{m1}c(T_1(x+dx) - T_1(x)) = -G_l dx(T_1(x) - T_2(x))$$

$$D_{m2}c(T_2(x) - T_2(x+dx)) = G_l dx(T_1(x) - T_2(x))$$

$$D_{m1}c \frac{dT_1(x)}{dx} = -G_l(T_1(x) - T_2(x))$$

$$-D_{m2}c \frac{dT_2(x)}{dx} = -G_l(T_2(x) - T_1(x))$$

On pose $\delta_1 = \frac{D_{m1}c}{G_l}$ et $\delta_2 = \frac{D_{m2}c}{G_l}$

$$\frac{dT_1(x)}{dx} + \frac{T_1(x) - T_2(x)}{\delta_1} = 0$$

$$\frac{dT_2(x)}{dx} + \frac{T_1(x) - T_2(x)}{\delta_2} = 0$$

Avec deux débits différents : $\frac{d(T_1(x) - T_2(x))}{dx} + \frac{T_1(x) - T_2(x)}{\delta_{eq}} = 0$

Avec : $\frac{1}{\delta_{eq}} = \frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta_2}$

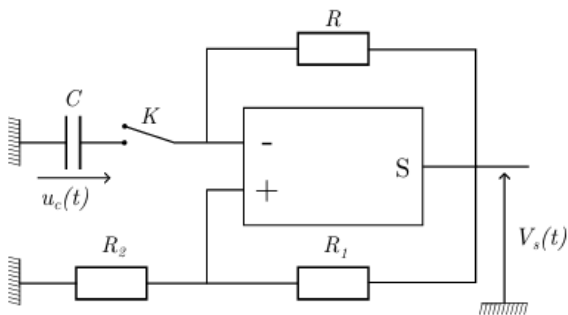
On obtient : $T_1(x) - T_2(x) = Ae^{-\frac{x}{\delta_{eq}}} = (T_{1s} - T_{2e})e^{-\frac{x}{\delta_{eq}}}$

$$T_{1e} - T_{2s} = (T_{1s} - T_{2e})e^{-\frac{L}{\delta_{eq}}}$$

Donc : $T_{2s} = T_{1e} - (T_{1s} - T_{2e})e^{-\frac{L}{\delta_{eq}}}$

Exercice 12 : z score

On considère un AO supposé idéal en fonctionnement saturé dans le montage suivant :



- 1) Donner l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ après la fermeture de K à $t = 0$ en sachant que $V_s(t = 0) = +V_{sat}$
- 2) Déterminer la tension u_c pour laquelle $V_s = -V_{sat}$
- 3) En déduire la période des oscillations.

- 4) On mesure la fréquence de l'oscillateur au cours de différentes expériences. On obtient les valeurs suivantes :

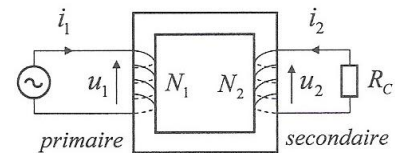
1,016	1,041	1,081	1,047	1,023
1,051	1,093	1,073	1,019	1,065
1,087	1,041	1,029	1,075	1,051

Moyenne : $\bar{f} = 1,053$ Hz
Écart-type : $\sigma = 0,025$ Hz

En déduire l'incertitude-type ainsi que la valeur du z-score

Exercice 13 : Etude du transformateur

Un transformateur est schématiquement constitué de deux circuits de résistances négligeables et d'inductances propres L_1 et L_2 , de nombre de spires N_1 dans le primaire (tension alternative $u_1(t)$ délivrée par EDF) et N_2 dans le secondaire (tension alternative $u_2(t)$ utile pour alimenter une charge R_c). Ces enroulements sont traversés par une carcasse magnétique, ce qui permet d'obtenir un couplage parfait permettant d'écrire que l'inductance mutuelle est donnée par : $M^2 = L_1 L_2$



- 1) Ecrire les lois des mailles dans les deux circuits.
- 2) En déduire le rapport des tensions $\frac{u_2(t)}{u_1(t)}$. Commenter.
- 3) On suppose la résistance R_c suffisamment faible pour la négliger. Donner l'expression du rapport de l'amplitude des courants en régime sinusoïdal

$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$. On peut donc abaisser ou élever la tension en jouant sur le nombre de spire de primaire et du secondaire

Si on suppose la résistance R_c suffisamment faible pour la négliger :

$$u_2 = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} = 0$$

$$\sqrt{L_2} \frac{di_2(t)}{dt} = -\sqrt{L_1} \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

Exercice 14 : Etude d'une tige calorifugée

Dans la suite, les tableaux devront suivre des opérations matricielles. Voici quelques opérations matricielles courantes sur Python :

```
import numpy as np
tab=np.array([[0,1],[2,3]])
Mat=np.matrix([[0,1],[2,3]])
print(tab*tab)#multiplication élément par élément
print(Mat*Mat)#produit qui suit les règles du calcul matriciel
print(np.asmatrix(tab)*np.asmatrix(tab))#np.asmatrix permet la conversion d'un tableau numpy en matrice
print(np.dot(tab,tab))#produit matricielle imposé aux tableaux numpy
print(np.linalg.inv(tab))#calcul de l'inverse d'une matrice et même d'un tableau
```

Les systèmes d'équations rencontrés seront alors notés $Ax = b$ où A est une matrice carrée, d'ordre n , inversible ou régulière (il existe A^{-1} tel que $AA^{-1} = I \Leftrightarrow \det A \neq 0$) et b un vecteur colonne de taille n . Pour résoudre de tels systèmes d'équations, on a :

```
print(np.linalg.solve(A,b))# résolve l'équation Ax=b
```

On considère une tige métallique de longueur L , de conductivité thermique λ , de masse volumique ρ et de capacité thermique c . Cette tige cylindrique est entièrement calorifugée. On note $T(x, t)$ le champ des températures de cette tige. Initialement, le profil des températures est linéaire :

$$T(x, 0) = T_{max} - \frac{(T_{max} - T_{min})}{L}x$$

Cette tige est alors le siège d'un phénomène de conduction thermique unidirectionnel selon son axe Ox .

Dans ces conditions, un bilan thermique dans la tige aboutit à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

A noter que le bilan enthalpique aux extrémités est différent et conduit à :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=0} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=L} = - \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L}$$

Dans la suite, on prendra $\lambda = 500W.K^{-1}.m^{-1}$, $c = 1000J.K^{-1}.kg^{-1}$, $L = 1m$, $T_{max} = 60^\circ C$, $T_{min} = 20^\circ C$ et $\rho = 10^4 kg.m^{-3}$.

L'analyse numérique aboutit à discrétiser le temps avec un pas $t_e = 10s$ et l'espace avec un pas $\delta = 10cm$. L'analyse sera effectuée pendant une durée de 10000s (on note $N_t = 1000$ le nombre d'échantillons temporels).

Pour chaque élément de la tige de longueur δ on a une température $T_{x_i}[t_j]$ où $x_i = i\delta$ et $t_j = jt_e$ avec i et j entiers. On note N_x le nombre d'éléments à considérer sur la tige.

- 1) Ecrire la dérivée partielle $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ selon une formule de différence finie centrée d'ordre 2.
- 2) Proposer un schéma d'Euler implicite pour résoudre ce problème
- 3) Obtenir, sur python, un tableau T de dimension (N_x, N_t) décrivant l'évolution spatio-temporelle de la température.
- 4) Obtenir enfin la représentation temporelle sur un même graphe des températures de chaque cellule.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &\equiv \frac{T[i, j + 1] - T[i, j]}{T_e} \\ \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} &\equiv \frac{\lambda}{\rho c} \frac{T[i + 1; j] + T[i - 1, j] - 2T[i, j]}{\delta^2} \end{aligned}$$

En utilisant un schéma d'Euler implicite et en posant $K = \frac{\lambda T_e}{\rho c \delta^2}$

$$T[i, j + 1] = T[i, j] + K(T[i + 1; j + 1] + T[i - 1, j + 1] - 2KT[i, j + 1])$$

$$\begin{pmatrix} 1+K & -K & & & & \\ -K & 1+2K & -K & & & \\ & -K & 1+2K & -K & & \\ & & -K & 1+2K & K & \\ & & & \dots & -K & 1+2K & -K \\ & & & & & -K & 1+2K & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{i=0}(t_{j+1}) \\ \vdots \\ T_i(t_{j+1}) \\ \vdots \\ T_L(t_{j+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{i=0}(t_j) \\ \vdots \\ T_i(t_j) \\ \vdots \\ T_L(t_j) \end{pmatrix}$$

On calcule alors facilement l'inverse de M sur python ou calculer suivant la méthode du pivot de Gauss

Rq : On peut apprécier la stabilité de ce schéma (qui est revanche plus délicat à manipuler) :

$$T_i(t_{j+1}) - T_i(t_j) = T_e \left(KT_{i-1}(t_{j+1}) - 2KT_i(t_{j+1}) + KT_{i+1}(t_{j+1}) \right)$$

Si : $T_{i-1}(t_{j+1}) = T_{i+1}(t_{j+1}) = 0$ alors $T_i(t_{j+1}) = \frac{T_i(t_j)}{1+2K} = \frac{T_i(t_0)}{(1+2K)^j}$ ce qui non divergent dans tous les cas.

```
#constante"
lamb =500
pau=10**4
c=1000
L=1
Nx=10
delta=L/Nx
duree=10000
Nt=1000
Te=duree/Nt
K=lamb*Te/(pau*c*delta**2)
Tc=60
Tf=20
Tinitial=25
```

#méthode d'euler implicite

```
A=np.zeros((Nx,Nx))
A[0,0]=1+K
A[0,1]=-K
A[Nx-1,Nx-1]=1+K
A[Nx-1,Nx-2]=-K
```

```
for i in range (1,Nx-1):
```

```
    A[i,i]=1+2*K
    A[i,i-1]=A[i,i+1]=-K
```

#calcul de l'inverse de A

```
Ai=np.linalg.inv(A)
```

#calcul du champ des températures

```
x=np.linspace(0,L,Nx)
T=np.zeros((Nx,Nt))
T[:,0]=Tc-(Tc-Tf)/L*x[:]
```

```
for i in range (Nt-1):
```

```
    T[:,i+1]=np.dot(Ai,T[:,i])
```

```
print(T)
```

```
"""tracés"""
```

#évolution temporelle de quelques températures en différents points

```
for i in range(Nx):
```

```
    plt.plot(np.linspace(0,duree,Nt),T[i,:])
    plt.xlabel("temps")
    plt.ylabel("température(°C)")
```

```
plt.title("température à différentes
positions")
plt.show()
#température aux extrémités en régime établi
plt.plot(np.linspace(0,L,Nx),T[:,Nt-1])
plt.xlabel("position")
plt.ylabel("température à différentes positions")
plt.title("température à différentes positions en
regime établi")
plt.show()
```

