Quelques éléments sur les travaux de Fourier

1) Description d'un signal périodique

a) Notions sur les séries de Fourier

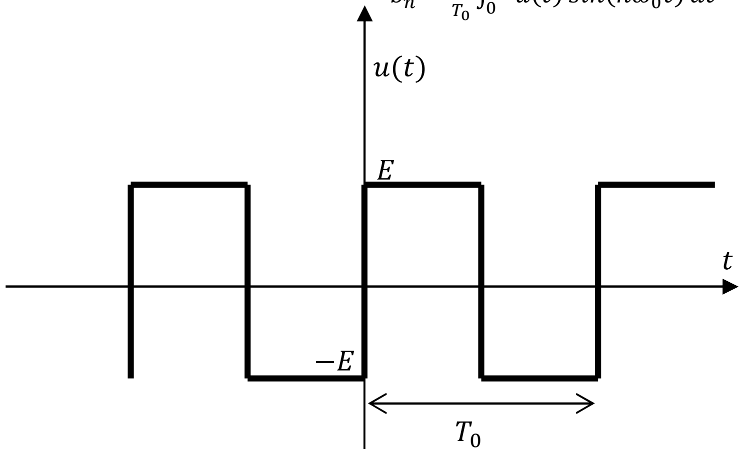
Soit $u(t)$ une fonction de forme quelconque mais périodique et de pulsation $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, le mathématicien Fourier a démontré que $u(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(t) = u_{moy} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\,\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(n\,\omega_0 t)$$

Avec une valeur moyenne donnée par $u_{moy} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)dt$ et des coefficients de Fourier vérifiant : $a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\,cos(n\omega_0 t)\,dt$ et $b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\,sin(n\omega_0 t)\,dt$. On pourra retenir que les coefficients a_n sont logiquement nuls pour une fonction $u(t)$ impaire et que les coefficients b_n sont logiquement nuls pour une fonction $u(t)$ paire.

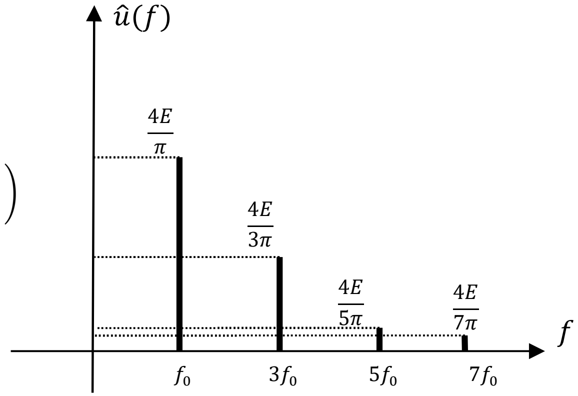
Dans le cas d'un signal carré impaire, on trouve un spectre discret (ou spectre de raies) :

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\,sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{4E}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} sin(n\omega_0 t)\,dt = -\frac{4E}{n\omega_0 T_0}[\cos(n\omega_0 t)]_0^{\frac{T_0}{2}} = -\frac{2E}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1)$$



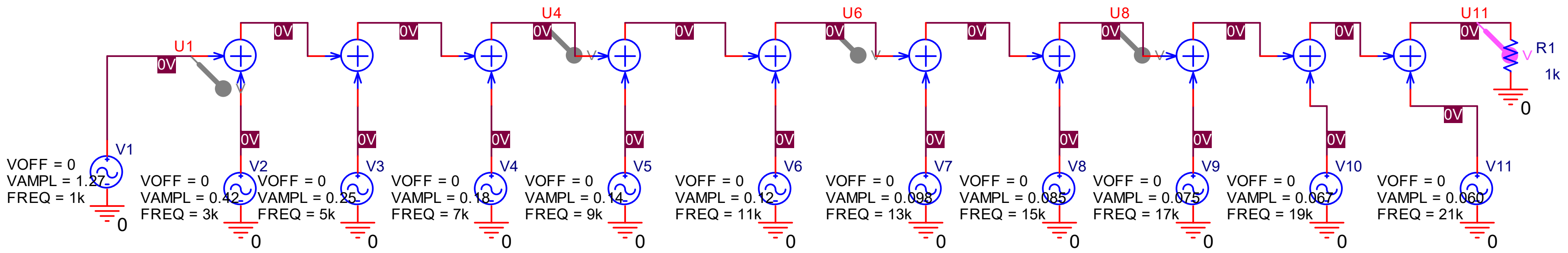
Représentation temporelle

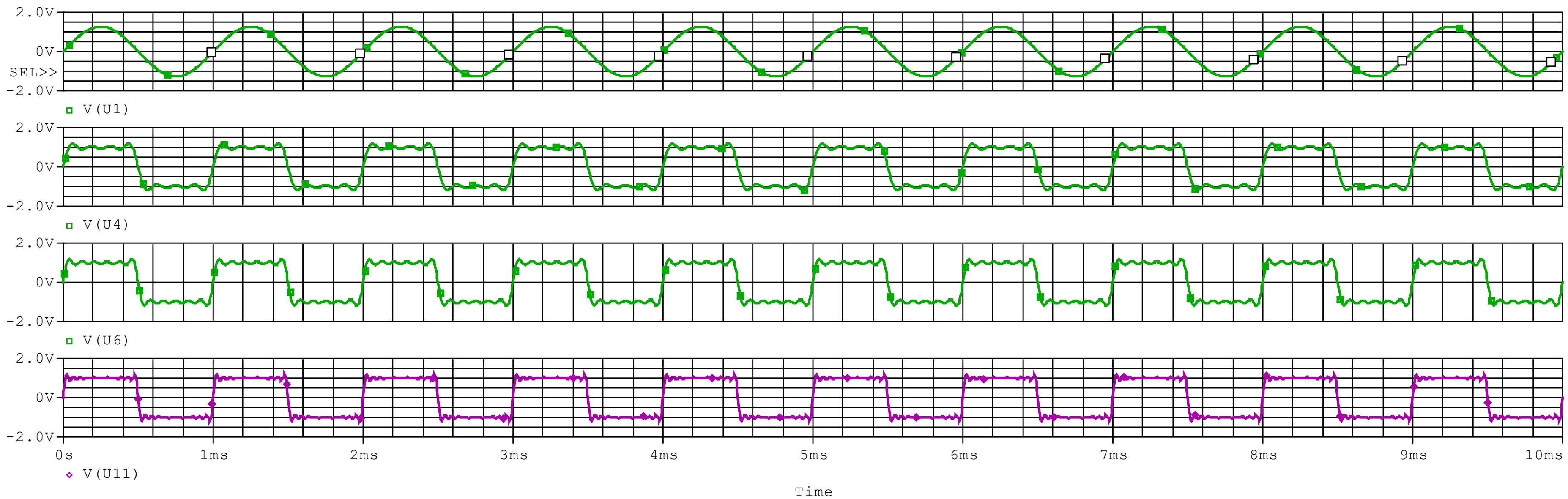
$$u(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} + \frac{\sin(5\omega_0 t)}{5} + \cdots\right)$$



Représentation spectrale

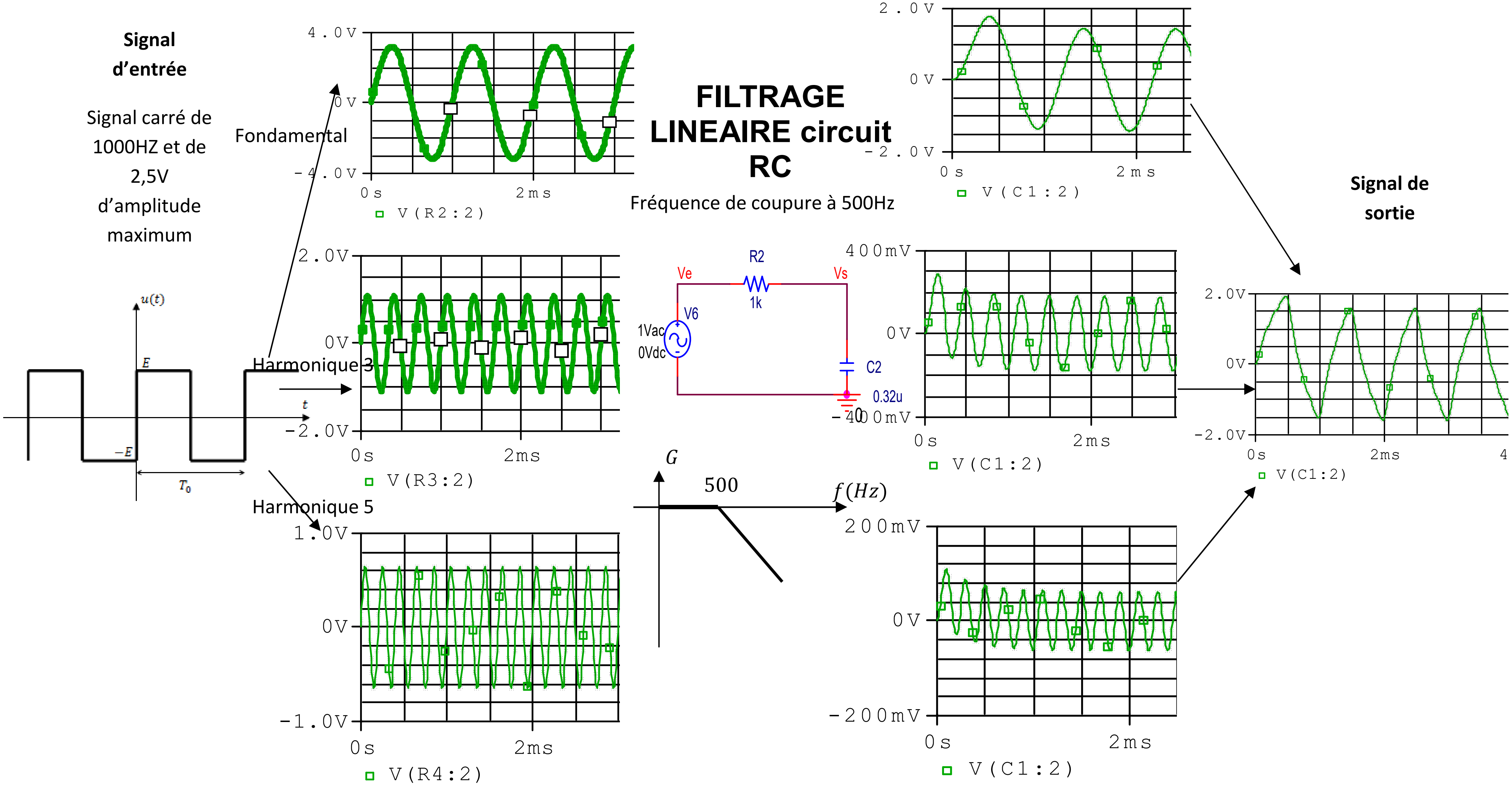
Réciproquement, on peut reconstituer un signal en sommant le fondamental et les harmoniques qui le constitue :





b) Application aux systèmes linéaires

Lorsque les systèmes sont linéaires, on est assuré que chaque composante de pulsation ω constituant le signal d'entrée aboutit à un signal en sortie possédant les même pulsations (avec un éventuel déphasage et une atténuation ou une amplification). Ainsi connaître le comportement du système pour toute composante (à l'aide d'un diagramme de Bode par exemple) c'est connaître la réponse du système pour toute excitation.



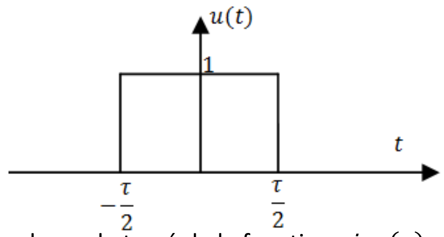
2) <u>Description d'un signal non périodique</u>

a) <u>La transformée de Fourier</u>

Lorsque le signal $u(t)$ n'est pas périodique alors son spectre $|\underline{\hat{u}}(\omega)|$ est obtenue par transformée de Fourier c'est-à-dire avec :

$$\underline{\hat{u}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\exp(-j\omega t)\, dt$$

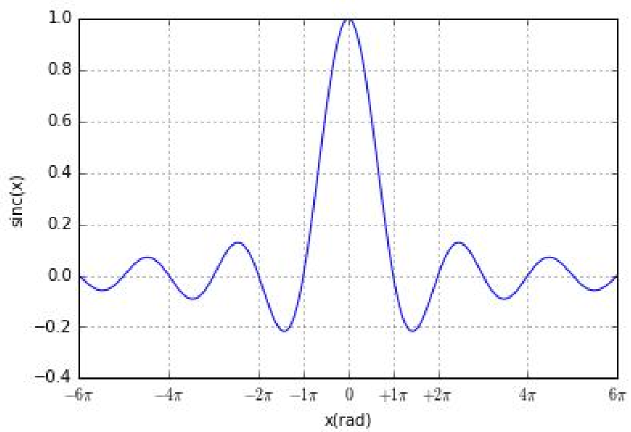
Dans le cas d'une impulsion émise pendant un temps τ, on obtient le résultat suivant :



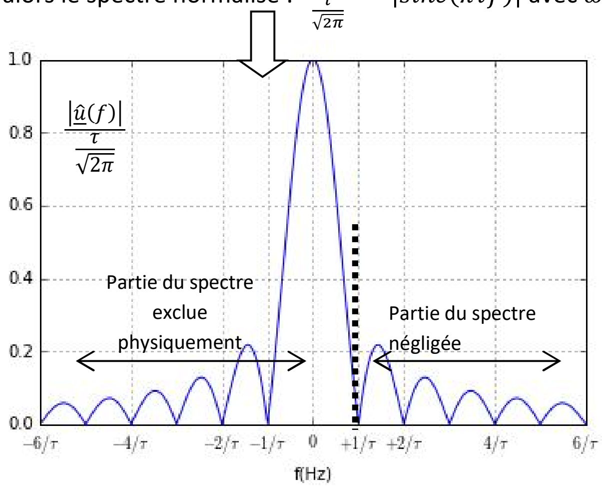
$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \exp(-j\omega t)\, dt = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\frac{\tau\omega}{2}} \right)$$

$$|\underline{\hat{u}}(\omega)| = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \left| sinc\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) \right|$$

On donne le tracé de la fonction $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$



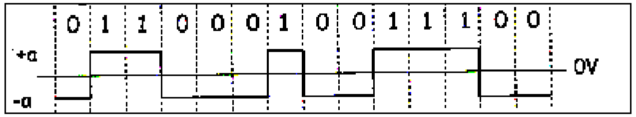
On trace alors le spectre normalisé : $\frac{|\underline{\hat{u}}(f)|}{\frac{\tau}{\sqrt{2\pi}}} = |sinc(\pi\tau f)|$ avec $\omega = 2\pi f$



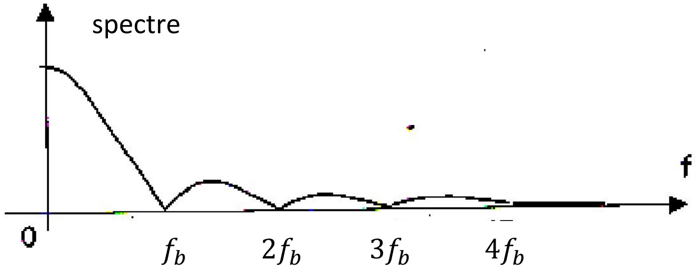
En se limitant aux domaines de pulsations positives, on remarque une amplitude notable pour $\Delta f \approx \frac{1}{\tau}$ qui permet d'affirmer qu'un signal « bref » est « riche spectralement ». On notera aussi que le spectre d'une fonction quelconque est continu.

b) Applications 1 : encombrement spectrale de données numériques

La numérisation des données analogiques conduit à faire transiter sur des supports matériels une succession de pulses appelées bits à une fréquence f_b. Pour des données aléatoires, le résultat de la page précédente permet de comprendre que le spectre est majoritairement compris entre 0 et f_b.



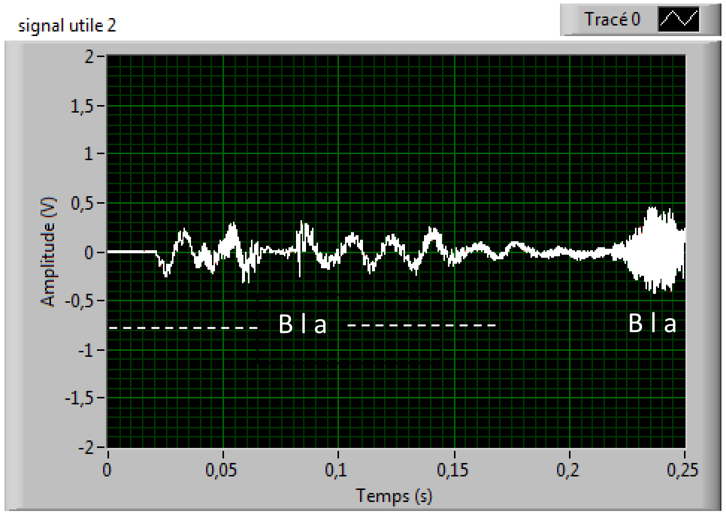
Représentation temporelle

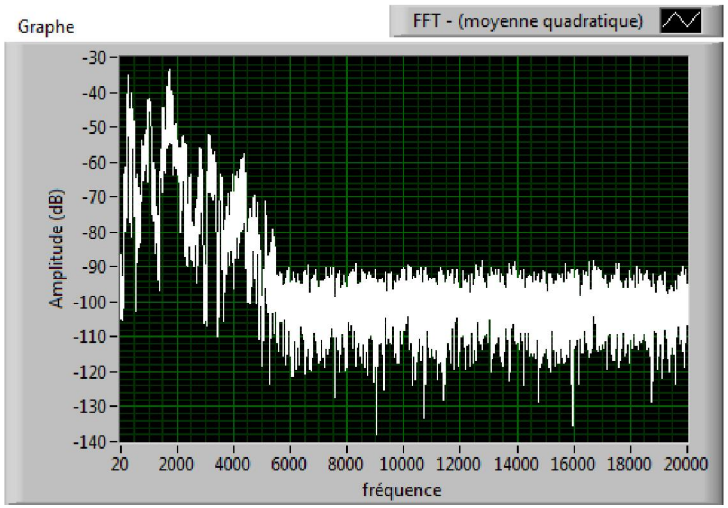


Représentation spectrale

c) Application 2 : spectre d'un signal sonore

Un signal quelconque n'est pas, en général périodique mais aléatoire. Il peut cependant toujours être vu comme une somme continue de sinusoïdes. Un signal acoustique issu d'une conversation peut être étudié en analysant son spectre compris typiquepent entre 20Hz et 5kHz.

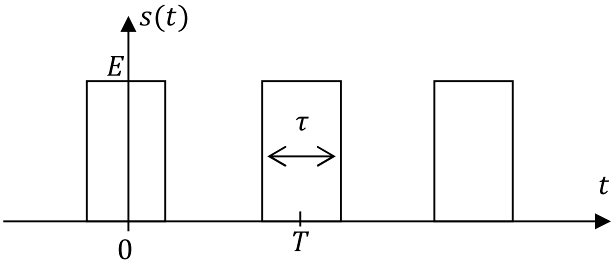




I- Etude d'un signal PWM (Pulse Width modulation)

Nous allons considérer un signal PWM $s(t)$ présentant deux niveaux : un état haut et un état bas de 0V. Ce type de signal carré est alors caractérisé par :

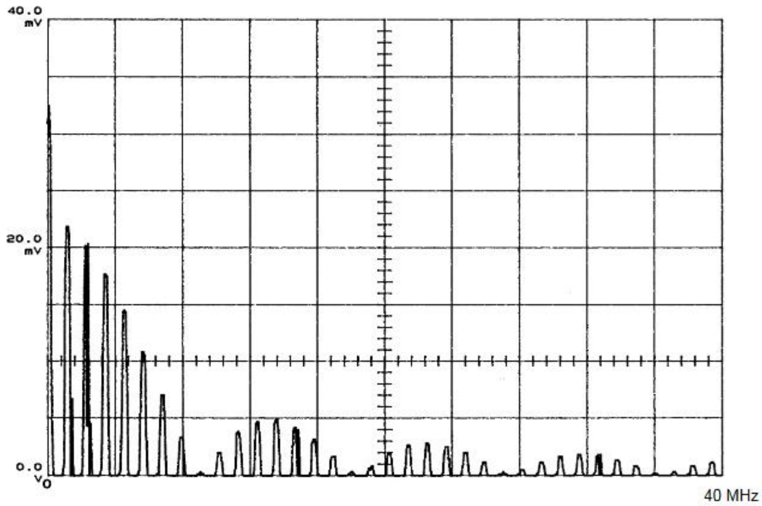
- Sa fréquence f (ou sa période $T = 1/f$)
- Son rapport cyclique α qui est le rapport du temps τ de l'état haut sur la période T : $\alpha = \frac{\tau}{T}$



Ce type de signal est très employé en électronique (par exemple pour le contrôle de la vitesse de rotation des moteurs à courant continu). Dans la suite, on souhaite étudier son spectre d'un tel signal. On montre que $s(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = \alpha E\left(1 + \frac{2\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\cos(\omega t) + \frac{2\sin(2\alpha\pi)}{2\alpha\pi}\cos(2\omega t) + \cdots + \frac{2\sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi}\cos(n\omega t) + \cdots\right)$$

1) On effectue le relevé ci-dessous d'un signal PWM.



Par lecture graphique, déterminer :

a) La valeur de la composante continue
b) L'amplitude de l'harmonique de rang 12
c) L'amplitude de l'harmonique de rang 32
d) La fréquence de l'Harmonique de rang 32

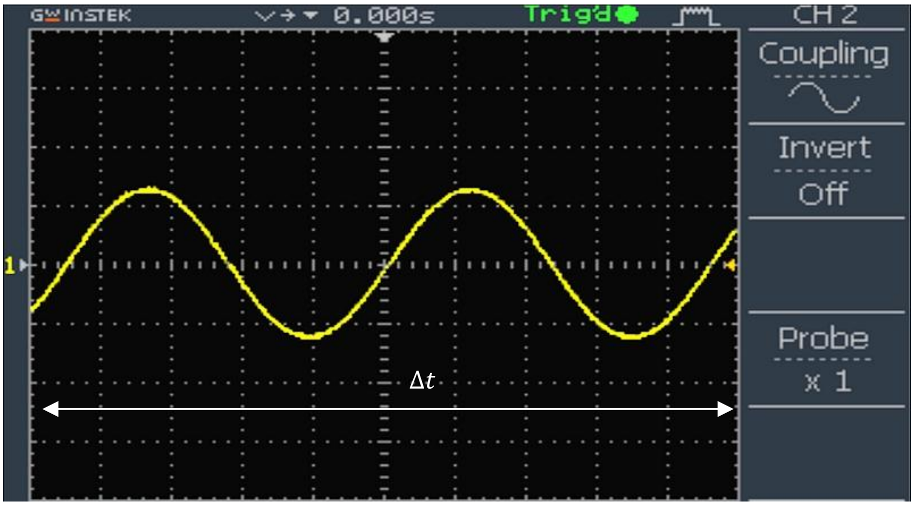
2) Des lectures précédentes, déterminer la valeur du rapport cyclique α.

On souhaite récupérer la valeur moyenne du signal ci-dessus.

3) Proposer les valeurs des composants d'un circuit RC permettant d'atténuer de 40dB l'amplitude du fondamental.

II- Spectre d'un signal sur un oscilloscope

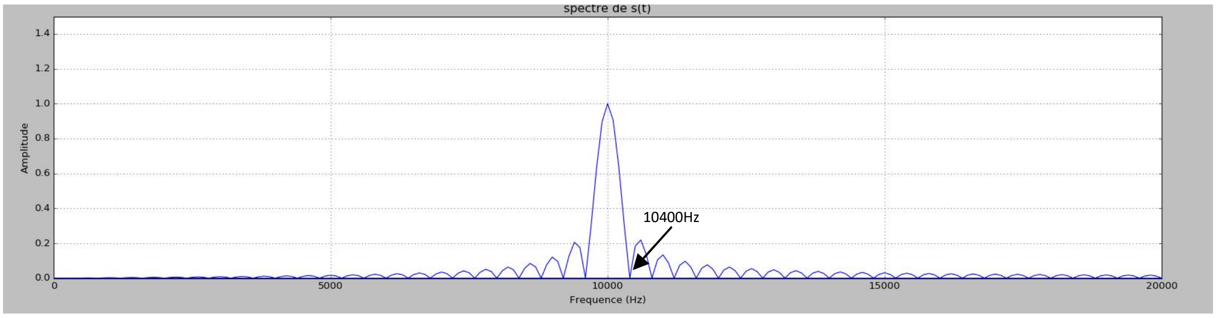
Il est possible d'obtenir le calcul de la transformée de Fourier d'un signal à l'aide d'un oscilloscope. Le spectre du signal calculé est alors celui du signal affiché sur l'écran et observé pendant un temps Δt.



Prenons l'exemple d'un signal sinusoïdal $u(t) = Ucos(2\pi f_0 t)$ envoyé sur un oscilloscope. Sur l'écran, on apprécie le signal $s(t) = u(t) \times h(t)$ avec $\begin{cases} h(t) = 1 \ si \ |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ h(t) = 0 \ si \ |t| > \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$

1) Le spectre $|\underline{\hat{s}}(f)|$ de $s(t)$ est toujours évaluée dans le domaine des fréquences positives. Montrer que $|\underline{\hat{s}}(f)| = \frac{U\Delta t}{2\sqrt{2\pi}}|sinc(\pi(f - f_0)\Delta t)|$

La simulation ci-dessous représente le spectre normalisé c'est-à-dire $\frac{|\underline{\hat{s}}(f)|}{2\frac{U\Delta t}{\sqrt{2\pi}}}$ d'un signal sinusoïdal $u(t)$ de fréquence 10000 Hz étudié pendant Δt. Le spectre n'est donc plus une raie « fine » mais un spectre qui se retrouve principalement dans une raie centrale « épaisse »



2) Déterminer, à l'aide du graphe précédent, le temps Δt pendant lequel le signal $u(t)$ est observé.
3) On peut distinguer deux raies centrales si le premier minima de l'une coïncide avec le maxima de l'autre. Quel doit alors être l'écart en fréquence Δf entre deux signaux sinusoïdaux acquis et pouvant être distingués spectralement (ces signaux étant étudiés temporellement sur une même fenêtre de durée Δt) ?