Partie a : Méthode des moindres carrés

On considère une série de n mesures (x_i, y_i) portant sur 2 paramètres physiques x et y. On souhaite tester une régression linéaire sur ces mesures, c'est-à-dire trouver la droite d'équation $y(x) = ax + b$ qui présente le moins d'écart possible avec le nuage de points. Pour trouver les coefficients a et b, on va étudier la quantité S définie telle que :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

Trouver la droite de régression la plus pertinente, c'est trouver les valeurs de a, b qui minimisent S (on admettra que S atteint bien un minimum).

1) Calculer $\frac{\partial S}{\partial a}$ et $\frac{\partial S}{\partial b}$
2) En déduire alors que les valeurs de a et b permettant la meilleure régression vérifient :

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - y_{moy} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{moy} \sum_{i=1}^{n} x_i} \\ b = y_{moy} - a x_{moy} \end{cases}$$

Partie b : Régression linéaire

Geoffrey Taylor a pu déterminer, à l'aide d'une simple analyse dimensionnelle, l'énergie E mise en jeu lors du déclenchement de la 1e bombe atomique le 16 juillet 1945. Ce résultat, pourtant « top secret », a pu être trouvé en analysant l'évolution temporelle du rayon R du nuage atomique en fonction du temps t dans une atmosphère de masse volumique $\rho = 1 kg.m^{-3}$. On montre que (en unité S.I.):

$$R \approx t^{\frac{2}{5}} \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Partie a compléter sur Capytal : 60c7-3807773

3) A l'aide des clichés joint à ce sujet, obtenir sur python, un tableau numpy des temps et un tableau numpy des rayons associés à chaque photo.
4) On pose $x = t$ et $y = R^{5/2}$, en cherchant à tester une régression linéaire du type $y(x) = ax + b$, en déduire une valeur de a et b en utilisant les résultats de la 1e partie. On utilisera les facilités de calculs offerts par la vectorisation et la fonction np.sum(tab) qui renvoie la somme des éléments du tableau tab.
5) Sur Python, la méthode des moindres carrés est également appliquée par la fonction polyfit du module numpy. Tester cette fonction et comparer vos résultats.
6) Superposer votre nuage de points et votre régression linéaire sur le même graphe. Conclure
7) En déduire la valeur de l'énergie E (en équivalent TNT) mise en jeu par cette explosion. On rappelle qu'une tonne de TNT équivaut à 4,2 GJ.

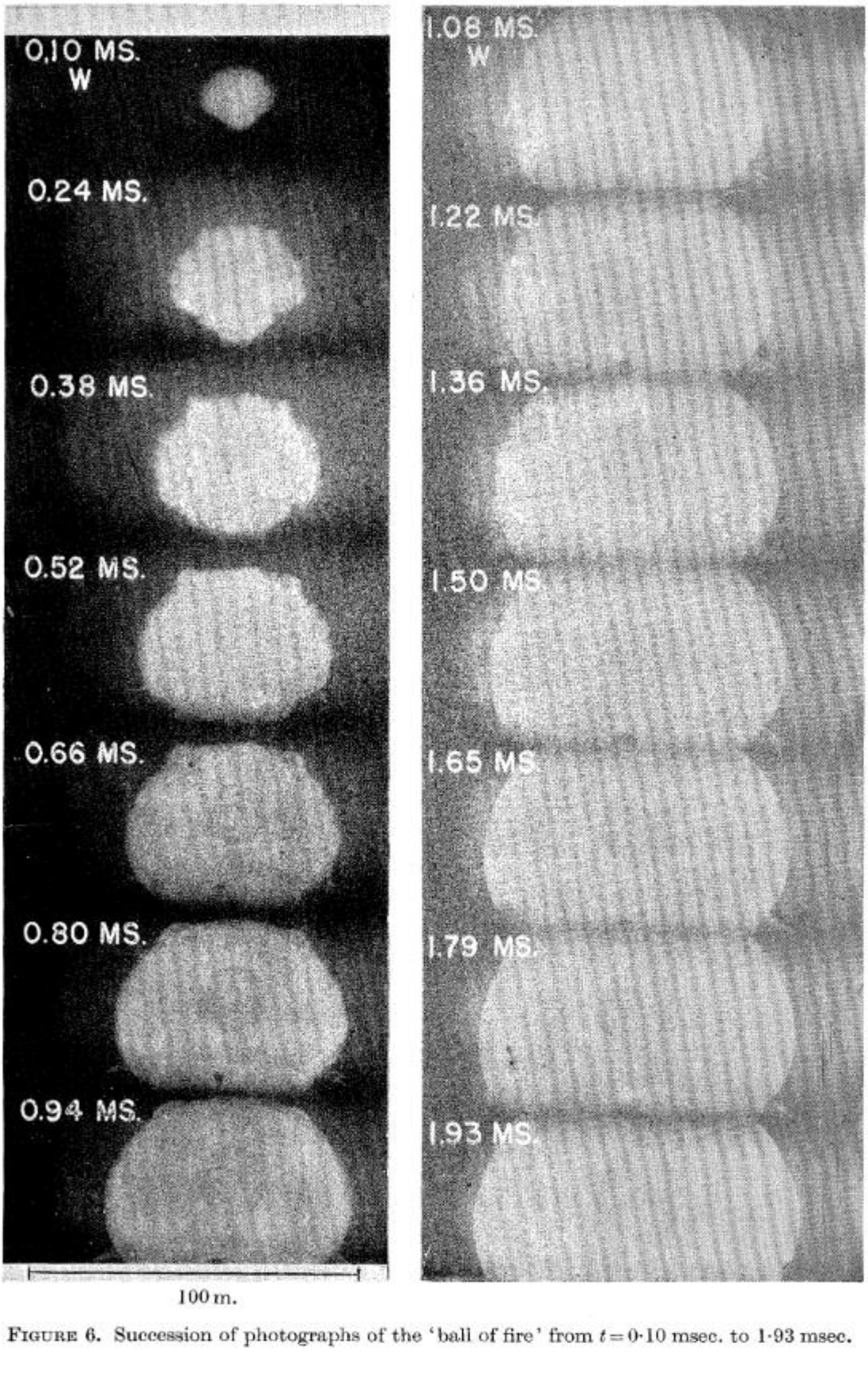

FIGURE 6. Succession of photographs of the 'ball of fire' from $t = 0{\cdot}10$ msec. to $1{\cdot}93$ msec.