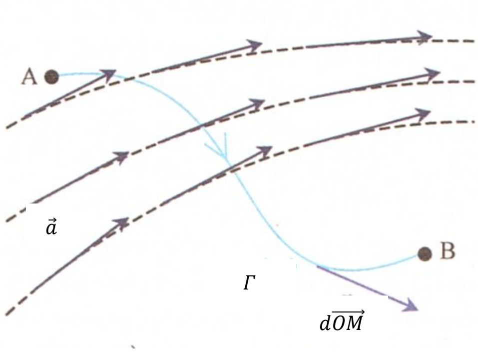
Document 1 : circulation d'un champ de vecteur $\vec{a}$

Pour caractériser un champ de vecteur $\vec{a}$, on apprécie sa tendance à circuler sur un contour $\boldsymbol{\Gamma}$ orienté d'un point A à un point B.

$\vec{a}$ est un champ de vecteur quelconque (champ électrostatique, champ des vitesses d'un écoulement…)



$d\overrightarrow{OM}$ est un déplacement élémentaire de M sur le contour orienté dans le sens A→B

Il s'agit donc d'apprécier la quantité scalaire $\vec{a}(M).d\overrightarrow{OM}$ sur tout le contour $\boldsymbol{\Gamma}$.

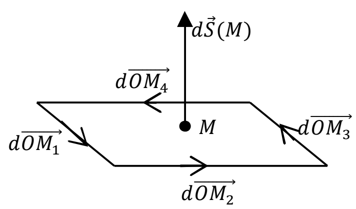
On définit la circulation C_{AB} sur un contour $\boldsymbol{\Gamma}$ orienté de A vers B d'un champ de vecteur $\vec{a}$ par :

$$C_{AB} = \int_{\Gamma(A\to B)} \vec{a}(M)\,.\,d\overrightarrow{OM}$$

Sur un contour fermé orienté, on notera : $C_\Gamma = \oint_\Gamma \ \vec{a}(M)\, d\overrightarrow{OM}$

Document 2 : L'opérateur rotationnel

Pour effectuer une analyse plus fine d'un champ $\vec{a}(M)$, nous serons amenés à effectuer un bilan de la circulation sur un contour élémentaire fermée (constitué d'éléments de longueur $\mathrm{d}\overrightarrow{OM_\iota}$ tels que $\sum_i \mathrm{d}\overrightarrow{OM_\iota} = \vec{0}$), orienté et centré sur M (et sur lequel repose une surface $dS(M)$ ouverte, quelconque associée à un élément vectoriel de surface orienté $d\vec{S}(M)$).

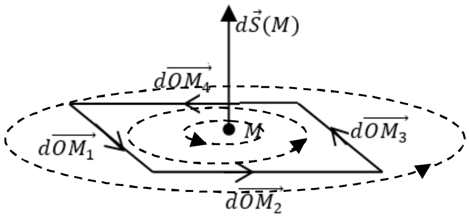
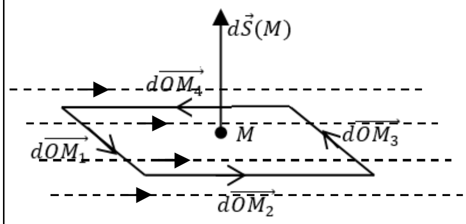


La circulation élémentaire $dC(M)$ associée est mesurée par $dC = \sum_i \vec{a}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{OM_\iota} = \overrightarrow{rot}\vec{a}(M).d\vec{S}(M)$.

De manière globale, on écrit le théorème de Stokes : $\oint \vec{a}.d\overrightarrow{OM} = \iint_S \ \overrightarrow{rot}\vec{a}.d\vec{S}$

L'opérateur rotationnel est un vecteur, il possède donc trois propriétés :

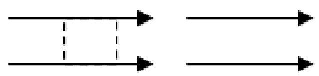
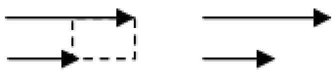
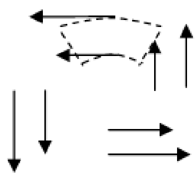
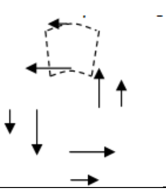
Norme	Direction	Sens
Renseigne sur la circulation de $\vec{a}$ sur le contour élémentaire fermé.	L'axe autour duquel $\vec{a}$ éventuellement tourne	Donné par la règle du tire-bouchon

Si le champ présente au moins un contour pour lequel $\vec{a}.d\overrightarrow{OM} \neq 0$, le champ est dit tourbillonnaire (au moins localement) : ce champ a tendance à tourner autour de M. Topographie « typique » d'un champ à rotationnel non nul. 	Si $dC = \sum_i \vec{a}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i} = 0$ pour <u>tout</u> M alors il n'y a aucune rotation locale du champ $\vec{a}$, ce champ est alors qualifié d'irrotationnel car $\vec{a}.d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{rot}\vec{a}.d\vec{S} = 0$ implique $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \vec{0}$. Pour un tel champ, on ne peut donc observer de ligne de champ fermée. Topographie « typique » d'un champ irrationnel. 

On démontre que l'opérateur rotationnel, noté $\overrightarrow{rot}\vec{a}(M)$ d'un champ vectoriel $\vec{a}(M)$ s'écrit :

En coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques
$\overrightarrow{rot}\vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{rot}\vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial r a_\vartheta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \end{pmatrix}$

Exemples :

	Allure de quelques lignes de champ	**Analyse qualitative du rotationnel à partir de $dC = \overrightarrow{rot}\vec{a}.d\vec{S}$**	**Valeur du rotationnel**
Champ uniforme $\vec{a} = 2\vec{e_x}$		On peut prévoir un bilan de circulation nulle	$\overrightarrow{rot}\vec{a} = 0$ Pas de tourbillon local
Champ non uniforme : $\vec{a} = 2y\vec{e_x}$		Circulation non nulle et le rotationnel est dirigé vers la feuille	$\overrightarrow{rot}\vec{a} = -2\vec{e_z}$ Ecoulement localement tourbillonnaire
Champ orthoradial à symétrie cylindrique $\vec{a} = 2r\vec{e_\theta}$		Bilan non nul (les particules de fluide tournent sur elles-mêmes) et le rotationnel est dirigé vers le lecteur	$\overrightarrow{rot}\vec{a} = 4\vec{e_z}$ Ecoulement localement tourbillonnaire
Vortex : $\vec{a} = \frac{2}{r}\vec{e_\theta}$		On peut prévoir un bilan de circulation nulle (car le champ diminue mais le contour augmente…). Sauf autour de O, les particules de fluide tournent mais pas sur elles-mêmes (pas de tourbillon)	$\overrightarrow{rot}\vec{a} = 0$ sauf en O, l'écoulement est à tourbillon localisé : circulation non nulle sur des courbes entourant l'axe Oz

Document 3 : Opérateur nabla

Il est fréquent de définir un opérateur, appelé nabla, pour les coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

Ainsi l'opérateur divergent s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$div\vec{a} = \vec{\nabla}.\vec{a}$$

L'opérateur rotationnel peut s'écrire en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}\vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$$

De même l'opérateur gradient peut se rencontrer sous la forme :

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}f$$

On peut alors remarquer que si $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \vec{0}$ alors il existe, pour ce champ ne dépendant que de l'espace, une fonction scalaire f tellque $\vec{a} = \overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}f$en effet, $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}f = \vec{0}$