

Document 1 : Repérages, éléments de longueur, de surface et de volume

On peut repérer la position d'un point dans l'espace à l'aide de plusieurs systèmes de coordonnées. Ce sont les conditions particulières du système qui vont conditionner le choix du système le plus adapté (par exemple les invariances et symétries)

i) En base cartésienne :

ii) En base cylindropolaire ou cylindrique :

iii) En base sphérique :

Questions :

1) Déterminer, par le calcul, le périmètre P d'un cercle de rayon R .

2) Déterminer, par le calcul, la surface S d'un disque de rayon R .

3) Déterminer, par le calcul, la surface S d'une sphère de rayon R

4) Déterminer, par le calcul, le volume V d'une sphère de rayon R

5) Volume d'un cône de rayon R et de hauteur H en l'assimilant à une superposition de volumes élémentaires

$$\pi r^2 dz$$

Document 2 : L'opérateur gradient

1) Rappels et définition de l'opérateur gradient

Fonction (ne posant pas de problème de dérivabilité)	Variation de la fonction
Fonction affine : $y(x) = ax + b$	La pente est définie par $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ et donc : $\Delta y = a\Delta x = y'\Delta x$
Fonction quelconque d'une variable : $f(x)$	La dérivée vérifie : $f'(x) = \frac{df}{dx}$ La variation locale (ou élémentaire) est donnée par : $df = f'(x)dx$
Fonction de trois variables : $f(x, y, z)$	La variation locale (ou élémentaire) est donnée par : $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz$ On va écrire ce résultat sous la forme d'un produit scalaire : $df = \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot d\overrightarrow{OM}$

On démontre alors les définitions de l'opérateur gradient dans les différentes bases :

En base cartésienne :	En base cylindrique	Base sphérique
	$\overrightarrow{\text{grad}f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\text{grad}f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$

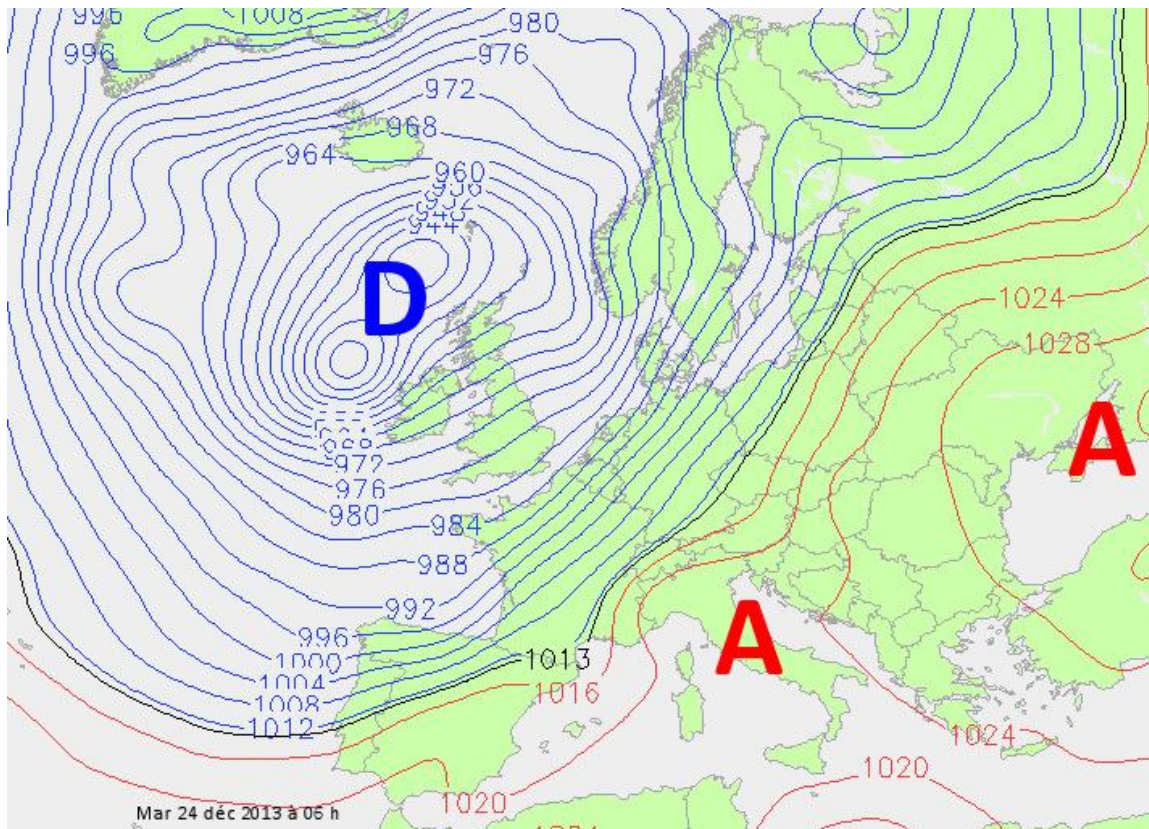
2) Propriétés de l'opérateur gradient

On peut donner quelques propriétés de l'opérateur gradient :

Norme de $\overrightarrow{\text{grad}f}$	Direction de $\overrightarrow{\text{grad}f}$	Sens de $\overrightarrow{\text{grad}f}$
Traduit un taux de variation spatial : donc norme non nulle si f dépend de l'espace.	Soit une surface pour laquelle une fonction f possède une valeur constante. Alors pour tout déplacement $d\overrightarrow{OM}$ le long de cette surface on a $df = 0$ et donc $\overrightarrow{\text{grad}f} \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$. On peut affirmer que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}f}$ est perpendiculaire aux surfaces où f est constante.	Par définition, le sens de l'opérateur gradient est celui de l'augmentation de la fonction considérée.

Exercice 1 :

Comment repérer sur le graphe ci-dessous une zone de vents forts ?

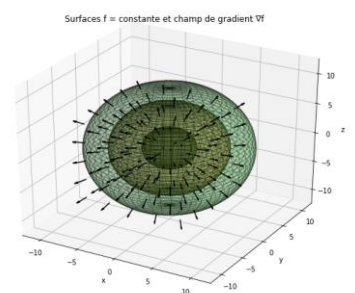


Exercice 2 :

On considère une fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

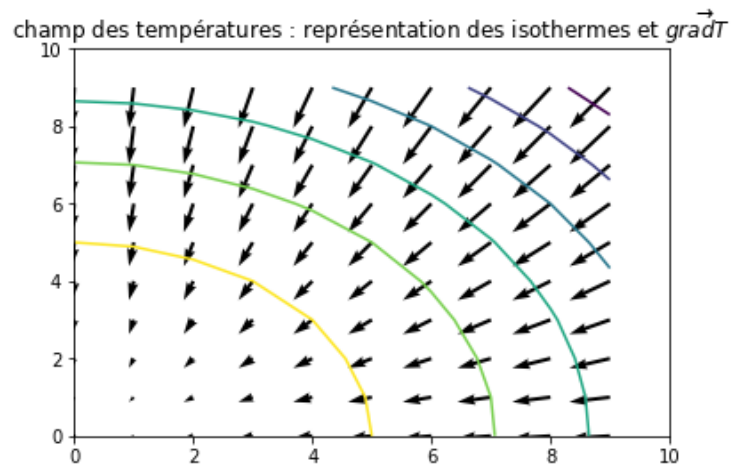
1) Quelle est la géométrie des lignes de niveau (surfaces pour lesquelles f est constante) ?

2) Calculer $\text{grad} f$ est interpréter sa norme, sa direction et son sens.



Exercice 3 :

On donne la représentation suivante du gradient d'un champ de température $T(x,y)$:



On donne : $\vec{\text{grad}}T = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$

- 1) Préciser où est la température la plus grande.

- 2) Déterminer l'expression du champ $T(x,y)$ en sachant que $T(0,0) = T_0$