

Annexe mathématique : Élément différentielle et variation élémentaire d'une fonction

Fonction (ne posant pas de problème de dérivabilité)	Représentation graphique	Variation de la fonction
Fonction affine : $f(x) = ax + b$		
Fonction quelconque d'une variable : $f(x)$		
Fonction de deux variables : $f(x, y)$		

- 1) Soit la fonction $f(x) = x^2$ démontrer, en remarquant que $df = f(x+x) - f(x)$, que $f'(x) = 2x$ en négligeant les infiniment petits du second ordre.

- 2) Soit $f(x) = \ln(x)$, rappeler l'expression de $f'(x)$ puis donner l'expression de $d\ln(x)$.

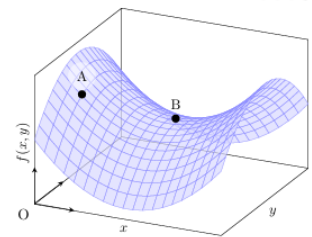
- a) Soit la relation entre 3 paramètres $a = bc$. En utilisant la différentielle logarithmique, donner l'expression de $\frac{da}{a}$ en fonction de $\frac{db}{b}$ et $\frac{dc}{c}$

- b) On effectue des mesures des grandeurs b, c avec des incertitudes telles que $\Delta b \ll b, \Delta c \ll c$. Déterminer l'expression de l'incertitude Δa en fonction de $b, c, \Delta b$ et Δc .

- 3) On considère une fonction f dépendant des deux variables x et y . On représente $f(x, y)$ dans le graphe ci-contre :

- a) Quel est le signe de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_A)$?

- b) Quel est le signe de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_A)$?



- c) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_B) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_B) = 0$ quels sont les signes de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_B)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_B)$?

- 4) Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy$

- a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$

- b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$

- c) Vérifier que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

5) Soit $d\psi = 2xydx + 4xydy$ en supposant que $\psi(x, y)$ existe :

a) Calculer $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$

b) Calculer $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$

c) Cette différentielle est associée à une unique fonction $\psi(x, y)$ si $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$. Est-ce le cas ?

6) Soit $d\psi = 3x^2ydx + x^3dy$ avec $\psi(x, y)$ une fonction qui existe et que l'on souhaite retrouver :

d) Montrer que $\psi(x, y) = x^3y + K(y)$ avec $K(y)$ une fonction pouvant dépendre, a priori, que de y .

e) Montrer que $\psi(x, y) = x^3y + C$ où C est une constante.

7) On considère un cylindre de rayon R et de hauteur H .

a) Donner l'expression de la surface compète S en fonction de R et H .

b) Donner l'expression du volume V en fonction de R et H

c) Donner l'expression de $S(R, V)$ puis de la différentielle dS

d) Un industriel souhaite minimiser ses coûts de production en utilisant le minimum de métal pour une boîte de conserve d'un volume V_0 donné. Comment doit-il choisir R par rapport à H ?

