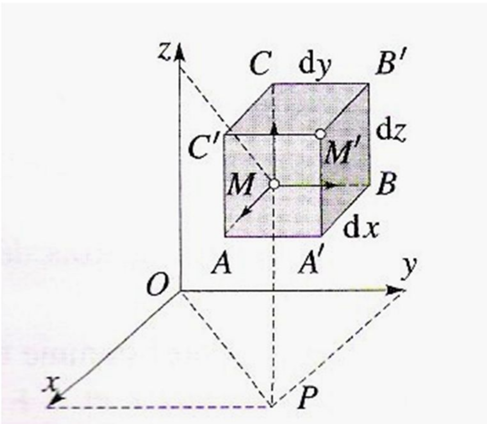
Document 1 : Repérages, éléments de longueur, de surface et de volume

On peut repérer la position d'un point dans l'espace à l'aide de plusieurs systèmes de coordonnées. Ce sont les conditions particulières du système qui vont conditionner le choix du système le plus adapté (par exemple les invariances et symétries)

i) En base cartésienne :

La position d'un point est repérée par le jeu de variables (x, y, z) par rapport à O et le vecteur position est donné par $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$



Une variation élémentaire $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$ a pour composante dx, dy, dz dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ des coordonnées cartésiennes.

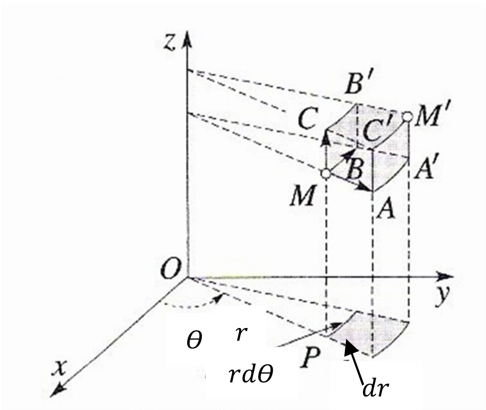
$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z} .$$

Un élément de surface sera donné par le produit des éléments différentiels définissant ses côtés. $dS_{AA'MB} = dxdy$ ou $dS_{CAAA'M'} = dzdy$ ou $dS_{C'CAM} = dxdz$

Un élément de volume sera donné par le produit : $dV = dxdydz$

ii) En base cylindropolaire ou cylindrique :

Les coordonnées d'un point M sont données par le jeu de variables (r, ϑ, z) et le vecteur position par $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\vartheta}, \overrightarrow{e_z})$



La variation différentielle $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$ est donc donnée dans la base de projection $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\vartheta}, \overrightarrow{e_z})$ par :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\vartheta\overrightarrow{e_\vartheta} + dz\overrightarrow{e_z}$$

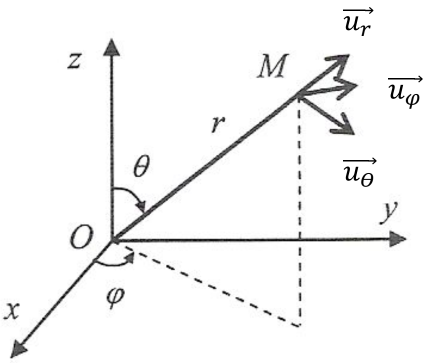
Les éléments de surface sont donnés par :

$dS_{AA'MB} = rdrd\vartheta$ ou $dS_{C'CAM} = drdz$ ou $dS_{C'M'AA'} = rd\vartheta dz$

L'élément de volume est lui donné par :

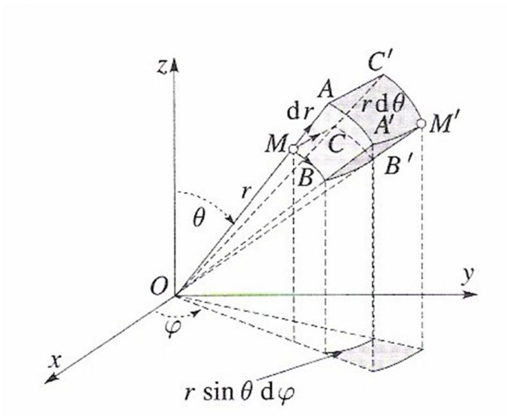
$dV = rdrd\vartheta dz$

iii) En base sphérique :



La position d'un point est repérée par le jeu de variables (r,θ,φ) par rapport à O et le vecteur position est donnée par :

$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r\overrightarrow{e_r}$ dans la base $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$



La variation différentielle $\overrightarrow{MM'} = d\,\overrightarrow{OM}$ est donc donnée dans la base de projection $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\vartheta},\overrightarrow{e_\varphi})$ par :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\vartheta\overrightarrow{e_\vartheta} + r\sin\vartheta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

Les éléments de surface sont donnés par :

$dS_{AA'MB} = rdrd\vartheta$ ou $dS_{C'CAM} = rdr\sin\vartheta d\varphi$ ou
$dS_{C'M'AA'} = r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$

L'élément de volume est lui donné par :

$$dV = r^2\sin\vartheta drd\vartheta d\varphi$$

Questions :

1) Déterminer, par le calcul, le périmètre P d'un cercle de rayon R.

$$P = \oint R d\theta = 2\pi R$$

2) Déterminer, par le calcul, la surface S d'un disque de rayon R.

$$S = \iint rdrd\theta = \int_0^R rdr \times \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2$$

3) Déterminer, par le calcul, la surface S d'une sphère de rayon R

$$S = R^2 \iint sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi R^2$$

4) Déterminer, par le calcul, le volume V d'une sphère de rayon R

$$V = \iiint r^2 sin\theta d\theta d\varphi dr = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Document 2 : L'opérateur gradient

1) Rappels et définition de l'opérateur gradient

Fonction (ne posant pas de problème de dérivabilité)	**Variation de la fonction**
Fonction affine : $y(x) = ax + b$	La pente est définie par $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ et donc : $\Delta y = a\Delta x = y'\Delta x$
Fonction quelconque d'une variable : $f(x)$	La dérivée vérifie : $f'(x) = \frac{df}{dx}$ La variation locale (ou élémentaire) est donnée par : $df = f'(x)dx$
Fonction de trois variables : $f(x, y, z)$	La variation locale (ou élémentaire) est donnée par : $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dx$ On va écrire ce résultat sous la forme d'un produit scalaire : $df = \overrightarrow{grad}f.d\overrightarrow{OM}$

On démontre alors les définitions de l'opérateur gradient dans les différentes bases :

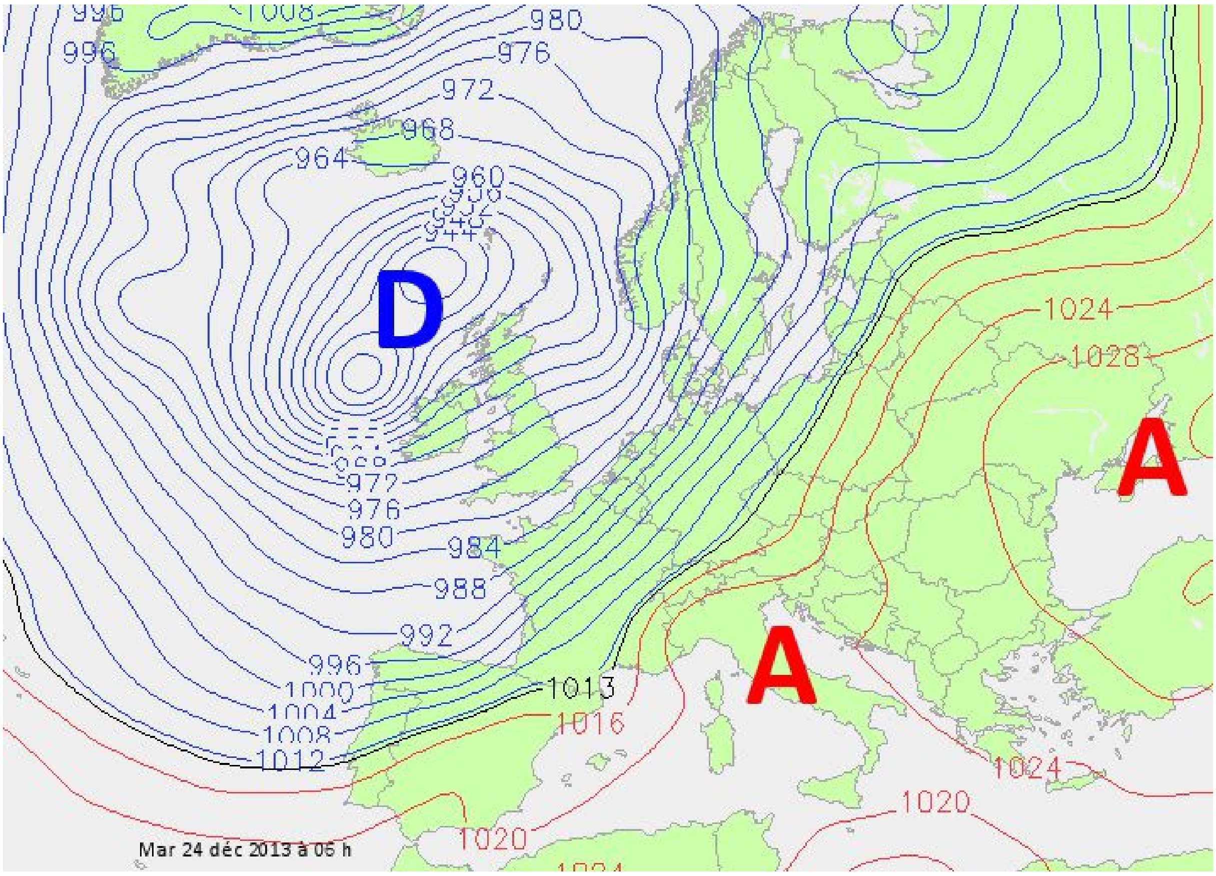
En base cartésienne :	En base cylindrique	Base sphérique
$\overrightarrow{grad}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{grad}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{grad}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$

2) Propriétés de l'opérateur gradient

On peut donner quelques propriétés de l'opérateur gradient :

Norme de $\overrightarrow{grad}f$	**Direction de $\overrightarrow{grad}f$**	**Sens de $\overrightarrow{grad}f$**
Traduit un taux de variation spatial : donc norme non nulle si f dépend de l'espace.	Soit une surface pour laquelle une fonction f possède une valeur constante. Alors pour tout déplacement $d\overrightarrow{OM}$ le long de cette surface on a $df = 0$ et donc $\overrightarrow{grad}f.d\overrightarrow{OM} = 0$. On peut affirmer que le vecteur $\overrightarrow{grad}f$ est perpendiculaire aux surfaces où f est constante.	Par définition, le sens de l'opérateur gradient est celui de l'augmentation de la fonction considérée.

Questions Comment repérer sur le graphe ci-dessous une zone de vents forts ?



Nous avons des isobares tous les 4hPa. Si ces isobares sont localement très proches : il y a donc un gradient de pression fort et donc des forces pressantes importantes. Il y a donc des vents forts dans cette région : c'est le cas dans la dépression D.