Document 1 : Direction(s) et variable(s) d'un champ de vecteur

Chaque coureur est repéré par les variables x et y.

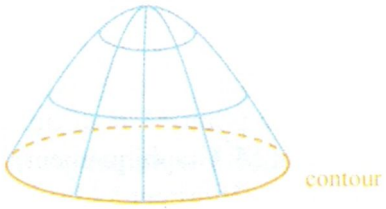
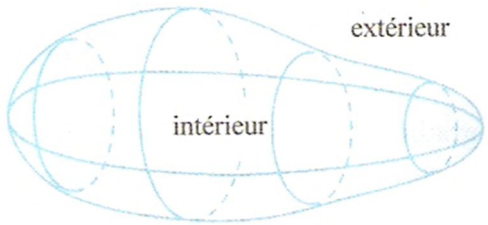
Cherchons à définir un « champ » des vitesses $\vec{v}(M,t)$ pour la photo ci-contre.

On peut alors proposer :

$$\vec{v}(M,t) = v_x(x,y,t)\overrightarrow{u_x}$$

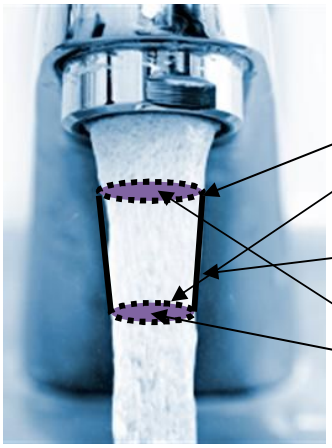
Document 2 : surfaces et orientation des vecteurs surfaces

Surface ouverte-surface fermée :

Une surface ouverte est limitée par une courbe appelée contour. La surface repose sur le contour.	Une surface est fermée lorsqu'elle n'est pas limitée par un contour. On peut alors définir un intérieur et un extérieur à la surface.
 Une surface ouverte.	 Une surface fermée.

Exemple de surfaces ouvertes et fermée :

Il sera fréquent de considérer une surface fermée comme étant formée par l'association d'un tube de champ fermé par deux surfaces ouvertes :



Contours fermés délimitant le tube de champ

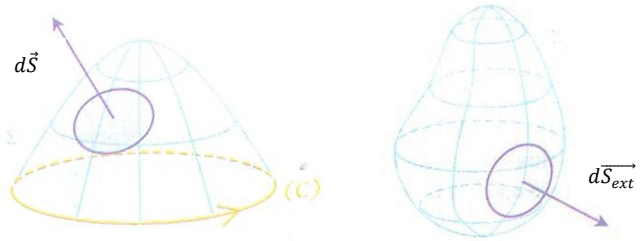
Tube de champ (surface ouverte)

Surfaces ouvertes reposant sur les deux contours fermés

Orientation mathématique des surfaces :

Ces surfaces peuvent être découpées en éléments de surfaces dS infinitésimaux. En chaque point de la surface, il est possible de construire un élément surfacique vectoriel en multipliant dS par un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface.

- Pour une surface fermée, l'élément de surface $d\vec{S} = dS\vec{n}$ est dirigé vers l'extérieur.
- Pour une surface ouverte, l'orientation de l'élément de surface est liée au choix du sens de parcours du contour sur lequel elle repose. $d\vec{S} = dS\vec{n}$ est alors orienté à l'aide de la règle du tire bouchon (le sens de progression de la vis donne le sens de $d\vec{S}$)



Document 3 : Flux d'un champ de vecteur

Soit $\vec{a}(M)$ un champ de vecteur. Nous allons évaluer la « quantité de lignes de champ » de $\vec{a}(M)$ qui traversent une surface en calculant son flux.

On définit le flux ϕ d'un champ de vecteur $\vec{a}(M)$ à travers une surface S ouverte par :

$$\phi = \iint_S \vec{a}(M).d\vec{S}\,(M)$$

Avec $d\vec{S}\,(M)$, élément (vectoriel) de surface centrée en un point M de S.

A noter que dans le cas d'une surface S fermée délimitant un volume V, la convention choisie mathématiquement est de compter positivement la quantité de lignes de champ sortantes et négativement la quantité de ligne de champ rentrantes dans la surface. Ce calcul de flux est alors un bilan de flux et est noté : $\phi = \oiint_S \vec{a}(M).\overrightarrow{dS_{ext}} = \phi_{sortant} > 0 + \phi_{entrant} < 0 = \phi_{sortant} - |\phi_{entrant}|$

Cette convention « mathématique » est l'opposée de celle retenue en thermodynamique où l'on compte le flux sortant négativement et le flux rentrant dans le système positivement. Avec cette convention mathématique, on peut définir l'opérateur divergent :

- Pour un bilan de flux sur un volume élémentaire dV : $d\phi = \sum_i d\phi_i = \sum_i \vec{a}.\overrightarrow{dS_{ext}} = div\vec{a}dV$
- Pour un bilan de flux sur un volume V : $\phi = \oiint_S \vec{a}.\overrightarrow{dS_{ext}} = \iiint_V div\vec{a}.dV$ (théorème d'Ostrogradski)

L'opérateur divergent est donc un opérateur mesurant le bilan de flux d'un champ de vecteur.

Document 4 : Pour les trois champs de vecteurs $\vec{a}$ proposés

- Prévoir qualitativement (par un bilan de flux) si $div\vec{a}$ est nul, positif ou négatif
- A l'aide des formules définissant la divergence :
  - En coordonnées cartésiennes :$div\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
  - En coordonnées cylindriques :$div\vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
  - En coordonnées sphériques :$div\vec{a}(M) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2 a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r sin\vartheta}\frac{\partial a_\vartheta sin\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r sin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$

	Allure de quelques lignes de champ	Analyse qualitative de la divergence à partir de $d\phi = div\vec{a}dV$	Valeur exacte de la divergence
Champ uniforme $\vec{a} = 2\overrightarrow{e_x}$			
Champ non uniforme : $\vec{a} = 2x\overrightarrow{e_x}$			
Vortex (en cylindrique) : $\vec{a} = \frac{2}{r}\overrightarrow{e_\theta}$			