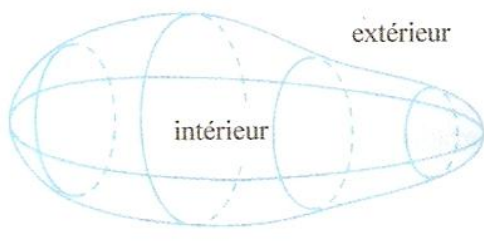


Document 1 : surfaces et orientation des vecteurs surfaces

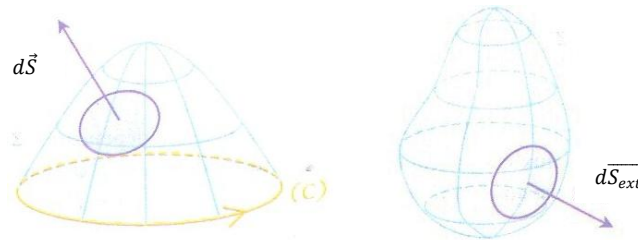
Surface ouverte-surface fermée :

Une surface ouverte est limitée par une courbe appelée contour. La surface repose sur le contour.	Une surface est fermée lorsqu'elle n'est pas limitée par un contour. On peut alors définir un intérieur et un extérieur à la surface.
 Une surface ouverte.	 Une surface fermée.

Orientation mathématique des surfaces :

Ces surfaces peuvent être découpées en éléments de surfaces dS infinitésimaux. En chaque point de la surface, il est possible de construire un élément surfacique vectoriel en multipliant dS par un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface.

- Pour une surface fermée, l'élément de surface $d\vec{S}_{ext} = dS\vec{n}$ est dirigé vers l'extérieur.
- Pour une surface ouverte, l'orientation de l'élément de surface est liée au choix du sens de parcours du contour sur lequel elle repose. $d\vec{S} = dS\vec{n}$ est alors orienté à l'aide de la règle du tire bouchon (le sens de progression de la vis donne le sens de $d\vec{S}$)



Parmi les figures suivantes, lesquelles sont des surfaces ouvertes et des surfaces fermées :

Surface plane délimitée par un carré	
Surface plane délimitée par un rectangle	
Surface délimitée par un cylindre	
Sphère délimitée par une sphère	
Surface plane délimitée par un cercle	

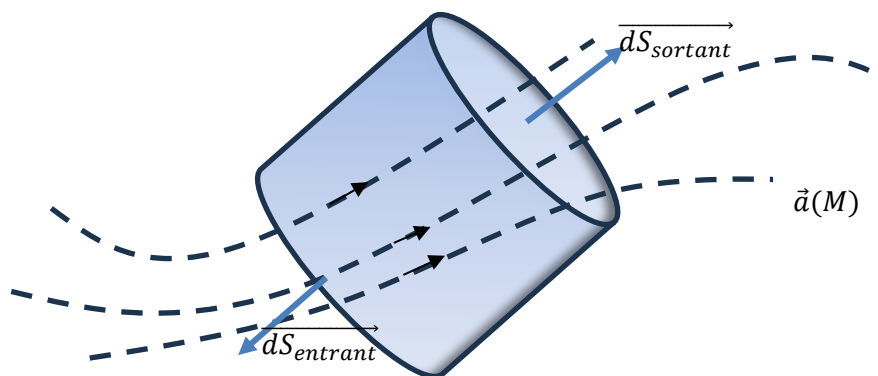
Document 2 : Flux d'un champ de vecteur1) Calcul de flux

i) Prévoir le signe des différents flux des cas présentés ci-dessous :

ii) Donner l'expression du flux d'un champ de vecteur $\vec{a}$ uniforme sur la surface S :

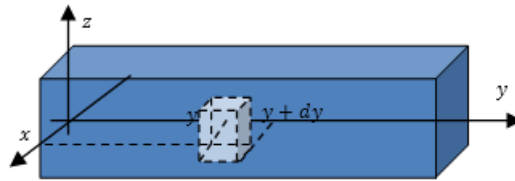
2) Bilan de flux

A noter que dans le cas d'une surface S fermée délimitant un volume V , la convention choisie mathématiquement est de compter positivement la quantité de lignes de champ sortantes et négativement la quantité de ligne de champ entrantes dans la surface.



3) Origine de l'opérateur de divergence

Soient un champ de vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_y(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix}$ et un élément de volume $dV = dxdydz$.



- i) Déterminer le flux rentrant élémentaire $d\phi_e$ à travers la surface $d\vec{S} = -dxdz\vec{u}_y$ à la côte y

- ii) Déterminer le flux rentrant élémentaire $d\phi_s$ à travers la surface $d\vec{S} = dxdz\vec{u}_y$ à la côte $y + dy$

- iii) En déduire l'expression du bilan de flux élémentaire à travers les surfaces délimitant dV

- iv) Que devient ce bilan de flux élémentaire dans le cas général ?

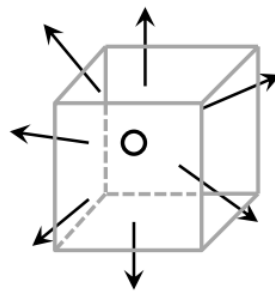
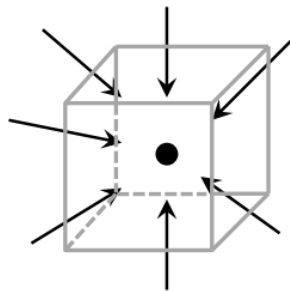
- v) Afin d'alléger l'écriture, on introduit l'opérateur de divergence par : $d\phi = \sum_i d\phi_i = \sum_i \vec{a} \cdot d\vec{S}_{ext} = \text{div} \vec{a} dV$

Document 3 : Pour les trois champs de vecteurs $\vec{a}$ proposés

- Prévoir qualitativement (par un bilan de flux) si $\text{div} \vec{a}$ est nul, positif ou négatif
- A l'aide des formules définissant la divergence :

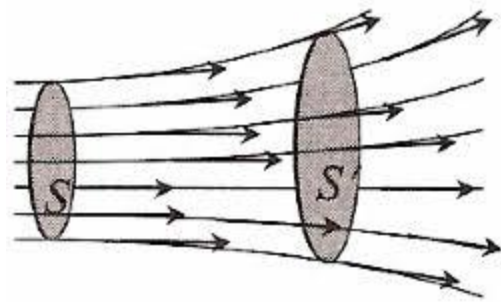
- En coordonnées cartésiennes : $\text{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
- En coordonnées cylindriques : $\text{div} \vec{a}(M) = \frac{1}{r} \frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
- En coordonnées sphériques : $\text{div} \vec{a}(M) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$

	Allure de quelques lignes de champ	Analyse qualitative de la divergence à partir de $d\phi = \text{div}\vec{a}dV$	Valeur exacte de la divergence
Champ uniforme $\vec{a} = 2\vec{e}_x$			
Champ non uniforme : $\vec{a} = 2x\vec{e}_x$			
Vortex (en cylindrique) : $\vec{a} = \frac{2}{r}\vec{e}_\theta$			



Document 4 : champ à flux conservatif

Soit un champ de vecteur $\vec{a}$ dont on représente un tube de champ ci-dessous. On note a_m le champ moyen sur la surface S et a'_m le champ moyen sur la surface S' .



- i) Donner une relation entre a_m , S , a'_m et S' si $\text{div} \vec{a} = 0$.

- ii) Que dire de l'intensité du champ si le tube de champ s'évase ou se contracte