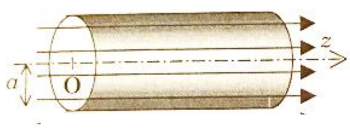
Exercice CCP: Les courants de Foucault

A. Chauffage par courants de de Foucault

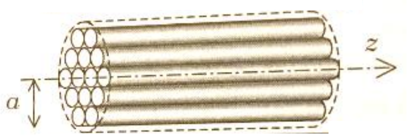
Un cylindre métallique de rayon a et de longueur l est immobile dans un champ magnétique. En repérage cylindrique, ce champ magnétique est tel que $\begin{cases} r < a : \vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_z} \\ r \geq a : \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$. $\vec{B}$ est donc localement parallèle à l'axe Oz du cylindre et varie sinusoïdalement dans le temps à la pulsation ω. Le métal est non magnétique, de perméabilité magnétique μ_0 assimilable à celle du vide et de conductivité γ. On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires et on négligera l'effet de peau (réponse auto-inductive du matériau).



1) Rappeler l'équation de Maxwell-Faraday en régime variable.
2) A l'aide d'arguments de symétrie et d'invariances clairement énoncés et corroborés par un schéma, justifier que le champ électromoteur $\overrightarrow{E_m}$ associé à $\vec{B}$ soit telle que $\overrightarrow{E_m}(r,t) = E_m(r,t)\overrightarrow{u_\theta}$
3) Déterminer l'expression du champ électromoteur $\overrightarrow{E_m}$ dans le cylindre en utilisant le théorème de Stokes.
4) Rappeler la loi d'Ohm locale reliant le vecteur densité de courant $\vec{j}$ à $\overrightarrow{E_m}$.
5) Exprimer la puissance volumique P_{vol} en fonction de γ et $\overrightarrow{E_m}$
6) En déduire alors la puissance moyenne $< P >$ dissipée par effet Joule dans le cylindre.

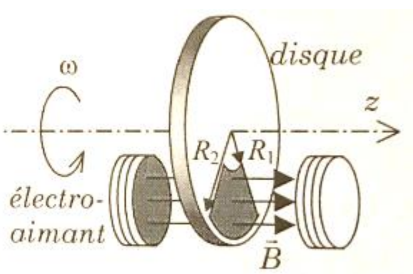
<u>Résolution de problème</u> : *Pour la question 7), il est attendu une mise en équation rigoureuse conduisant tout d'abord à la manipulation de grandeurs littérales clairement définies permettant ensuite d'aboutir à une analyse énergétique.*

7) On remplace cylindre métallique précédent par un autre cylindre de même dimension mais constitué de N tiges cylindriques identiques et isolées entre elles. On note $< P' >$ la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans ce cylindre. Quelle relation existe-t-il entre $< P >$ et $< P' >$?



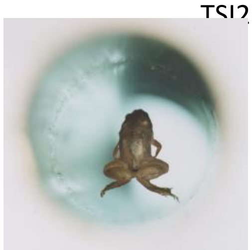
B. Freinage par courants de Foucault

Un frein magnétique à disque est constitué d'un disque métallique de rayon R et d'épaisseur e fixé sur l'arbre d'une machine tournant à une vitesse angulaire ω, et d'un électro-aimant produisant un champ magnétique $\vec{B}$ quasi-uniforme et perpendiculaire au disque sur un secteur S d'angle α situé entre R_1 et $R_2 < R$. Dans cette situation, un conducteur mobile dans un champ magnétique stationnaire est soumis à un champ électromoteur donné par $\overrightarrow{E_m}(M) = \vec{v}(M) \wedge \vec{B}$ où $\vec{v}(M)$ est la vitesse du conducteur par rapport au référentiel lié à l'électroaimant. On note γ la conductivité électrique du disque.



8) Exprimer $\overrightarrow{E_m}(M)$ en fonction de la distance radiale r, ω et B (norme de $\vec{B}$)
9) En déduire l'expression de la densité volumique de la force de Laplace $\overrightarrow{F_{vol}}$ en précisant bien son orientation dans un système de repérage clairement dessiné sur votre copie.
10) Calculer le moment $\vec{M}$ résultant exercé sur le disque. Commenter

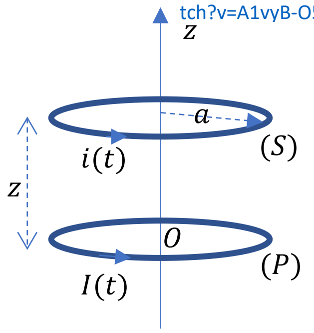
Exercice Centrale : Lévitation magnétique d'une grenouille



https://www.youtube.com/watch?v=A1vyB-O5i6E

Une grenouille est principalement constituée d'eau qui présente un comportement diamagnétique et donc une réponse inductive potentielement observable. Cet exercice cherche à apprécier les conditions expérimentales qui permettent la lévitation magnétique d'une grenouille par effet inductif dans un champ magnétique variable. Dans toute la suite, on se place en ARQS.

La grenouille sera assimilée à une simple spire (S) de rayon $a = 5cm$, de résistance R, d'inductance L et parcourue par un courant induit $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \psi)$ (i_0 et ψ étant des constantes). (S) baigne dans le champ magnétique rayonné par une autre spire notée (P), de même axe que (S) et aussi de rayon a. (P) est parcourue par un courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ générant un champ magnétique donné par $\vec{B}(r,z,t) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{2}\frac{dB_0(z)}{dz}\cos(\omega t) \\ 0 \\ B_0(z)\cos(\omega t) \end{pmatrix}$ en repérage cylindrique. $B_0(z)$ est donnée par $B_0(z) = \frac{\mu_0 I_0}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$



1) Tracer sur votre copie l'allure de quelques lignes de champ magnétique créées par (P) puis justifier l'existence de la composante radiale B_r de $\vec{B}$ par une analyse de symétrie de la distribution.

2) Rappeler l'équation de Maxwell-Thomson (ou Maxwell-flux).

3) Montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ proposé au voisinage de (S) est bien à flux conservatif. On pourra utiliser la divergence en coordonnées cylindriques : $div(\vec{B}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

4) Dessiner le circuit électrique équivalent de la spire (S) dans lequel ont lieux les phénomènes d'induction.

5) Montrer que l'équation différentielle dont est solution $i(t)$ est : $\frac{di}{dt} + \omega_0 i = K\omega \sin(\omega t)$ où $\omega_0 = \frac{R}{L}$ et K est une constante que l'on exprimera en fonction des données du sujet.

La linéarité du problème permet l'utilisation de la notation complexe, cette écriture permet d'effectuer les transformations suivantes : $\begin{cases} K\sin(\omega t) = K\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \to -jKe^{j\omega t} \\ i_0 \cos(\omega t + \psi) \to \underline{i} = i_0 e^{j(\omega t + \psi)} \end{cases}$

6) On se place expérimentalement dans le cas où $\omega \gg \omega_0$. Montrer que $i_0 \approx \frac{\pi a^2 B_0(z)}{L}$ et $\psi \approx \pi$.

7) Exprimer la force de Laplace $\vec{F}$ s'exerçant sur (S) en fonction de a, i et $B_r(z_0)$.

8) En déduire alors que la moyenne temporelle de $\vec{F}$ est $< \vec{F} > \approx \frac{3\pi^2 a \mu_0^2 I_0^2}{8L}\frac{z/a}{\left(1+\left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^4}\vec{u_z}$.

<u>Résolution de problème</u> : *Pour cette question, il est attendu une réponse précise et quantitative issue d'une réflexion utilisant les résultats précédents.*

9) On donne ci-dessous la représentation graphique de $\frac{Z}{(1+Z^2)^4}$ en fonction de Z. On prend $I_0 = 20A$ et $L = 0{,}1nH$. Justifier que la lévitation d'une grenouille est effectivement possible.