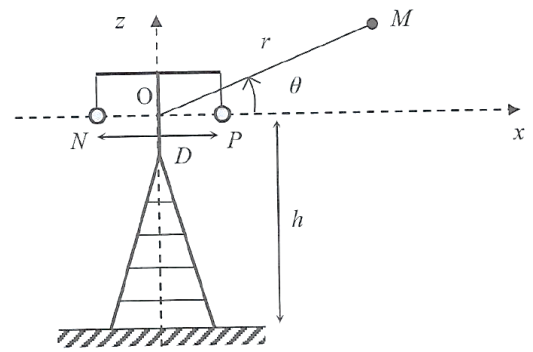


Exercice Centrale : Etude d'une ligne THT

Dans cet exercice, on va étudier l'intensité du champ électrique à proximité d'une ligne électrique très haute tension. La ligne ici décrite est constituée de deux câbles N et P cylindriques parallèles, supposés de longueurs infinies, de rayon R et séparés d'une distance $D \gg R$. On modélise la ligne d'un point de vue électrostatique. : les tensions dans les deux câbles sont opposées. On note V_0 le potentiel du câble P . L'air est associé à une permittivité diélectrique identique à celle du vide et notée $\epsilon_0 \approx 10^{-11} \text{F/m}$.

A) Etude du câble P seul

Soit σ la densité surfacique de charge supposée uniforme du câble P .

- 1) Donner l'expression du champ électrique $E_p(M)$, à l'aide du théorème de Gauss et des analyses préalables des symétries et invariances du problème, en un point M quelconque extérieur au câble en fonction de σ, ϵ_0, R et la distance radiale r_p entre le point M et l'axe du câble P .
- 2) En déduire le potentiel $V_p(M)$ associé au champ électrique $\vec{E}_p(M)$, en fonction de σ, ϵ_0, R et la distance radiale r_p . Ce potentiel sera déterminé à une constante près que l'on ne cherchera pas à déterminer.

B) Association des deux câbles

Soit $-\sigma$ la densité surfacique de charge supposée uniforme du câble N .

- 3) Donner l'expression du potentiel $V_N(M)$ associé au câble N en fonction de σ, ϵ_0, R et la distance radiale r_N entre le point M et l'axe du câble N . Ce potentiel sera déterminé à une constante près que l'on ne cherchera pas à déterminer.
- 4) En déduire que le potentiel total $V_{tot}(M)$ est donné par :

$$V_{tot}(M) = V_p(M) + V_N(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_N}{r_p}\right)$$

On choisira un potentiel nul dans le plan médiateur soit pour $r_N = r_p$.

- 5) En tenant compte de la valeur du potentiel sur la surface du câble P , montrer que $\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \approx \frac{V_0}{\ln(\frac{D}{R})}$

C) Association des deux câbles dans l'approximation dipolaire

On repère maintenant un point M de l'espace par ses coordonnées polaires (r, θ) , l'origine O étant placé au milieu de N et P . L'approximation dipolaire consiste, en plus de $D \gg R$, à considérer que $r \gg D$.

- 6) Donner une expression approchée de r_p à l'ordre 1 en fonction de D, r et θ .
- 7) Donner une expression approchée de r_N à l'ordre 1 en fonction de D, r et θ .
- 8) Montrer alors que le potentiel total est alors donné par : $V_{tot}(M) \approx \frac{V_0}{\ln(\frac{D}{R})} \frac{D \cos \theta}{r}$.

On donne l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}V(r, \theta) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

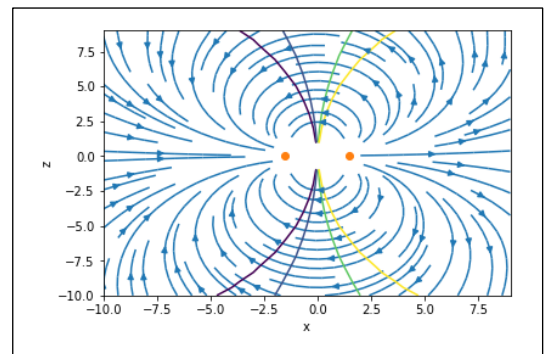
- 9) Donner l'expression de la composante radiale et orthoradiale du champ électrique total en conservant les hypothèses de travail précédente.
- 10) En déduire l'expression de la norme du champ électrique total.

On considère une ligne THT ayant les caractéristiques suivantes :

$$V_0 = 400 \text{kV}, D = 3 \text{m}, R = 3 \text{cm}, h = 10 \text{m}$$

Depuis mai 2001, un arrêté fixe les limites d'exposition du public aux champ électromagnétiques provoqués par le réseau d'alimentation électrique : la position des ouvrages par rapport aux lieux normalement accessibles aux tiers doit être telle que le champ électrique résultant en ces lieux n'excède pas 5kV/m dans les conditions de fonctionnement en régime de service permanent.

- 11) La ligne étudiée précédemment est-elle en accord avec la réglementation ?
- 12) Obtenir le graphe ci-contre sur python. On cherchera à identifier au préalable :
 - les lignes de champ électrique,
 - les équipotentielles (ici de $-10 \text{kV}, -5 \text{kV}, 5 \text{kV}$ et 10kV)
- 13) Vérifier que cette simulation est en accord avec résultat de la question 11



Corrigé :

1) $\vec{E}_p(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r_p} \vec{u}_{r_p}$	2
2) $V_p(M) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln(r_p) + Cte$	2
3) $V_N(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln(r_N) + Cte'$	1
4) D'après les résultats précédents : $V_{tot}(M) = V_p(M) + V_N(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_N}{r_p}\right) + K$	2
5) On a $V_{tot}(R) = V_0 \approx \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{D}{R}\right)$ donc $V_{tot}(M) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \ln\left(\frac{r_N}{r_p}\right)$	2
6) $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM}$ donc $r_p^2 = r^2 + \frac{D^2}{4} - rD\cos\theta$ et à l'ordre 1 : $r_p = r\left(1 - \frac{D}{2r}\cos\theta\right)$	1
7) $\vec{NM} = \vec{NO} + \vec{OM}$ donc $r_N^2 = r^2 + \frac{D^2}{4} + rD\cos\theta$ et à l'ordre 1 : $r_N = r\left(1 + \frac{D}{2r}\cos\theta\right)$	1
8) $V_{tot}(M) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \ln\left(\frac{r_N}{r_p}\right) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \ln\left(\frac{(1+\frac{D}{2r}\cos\theta)}{(1-\frac{D}{2r}\cos\theta)}\right) \approx \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \left(\frac{D}{r}\cos\theta\right)$	1
9) $E_r = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \left(\frac{D}{r^2}\cos\theta\right)$ et $E_\theta = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \left(\frac{D}{r^2}\sin\theta\right)$	2
10) $E = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \frac{D}{r^2}$	1
11) $E(h) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{D}{R}\right)} \frac{D}{h^2} \approx 2,6kV/m$	1
12) <pre> import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt V0=400*10**3 D=3 R=0.03 h=10 x=np.arange(-10,10,1) z=np.arange(-10,10,1) X,Z=np.meshgrid(x,z) r=(X**2+Z**2)**0.5 V=V0/(np.log(D/R))*D*X/r**2 Ez,Ex=np.gradient(V) Ez,Ex=-Ez,-Ex plt.streamplot(X,Z,Ex,Ez) scale=(-10*10**3,-5*10**3,5*10**3,10*10**3) plt.contour(X,Z,V,scale) plt.xlabel("x") plt.ylabel("z") plt.plot([-D/2,D/2],[0,0],"o") plt.show() </pre>	
14) On retrouve un champ de 2,5kV/m en mesurant la distance entre les deux équipotentielles	

Exercice CCinP : Etude de la réaction de fission nucléaire

A) Questions de cours

1) Rappeler l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ et du potentiel $V(r)$ à la distance r d'une charge ponctuelle q située dans le vide.

2) Rappeler l'expression générale reliant le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ à son potentiel $V(r)$

Soit une charge ponctuelle q déplacée d'un point A à un point B dans un champ électrostatique \vec{E} quelconque.

3) Exprimer le travail W_q mis en jeu par la force électrique agissant sur la charge q au cours du déplacement AB

4) On note la variation de potentiel $V_B - V_A$ entre les points B et A , montrer que $W_q = -q(V_B - V_A)$

B) Travail électrique

Pour évaluer l'énergie nécessaire pour former un noyau d'uranium de charge Q , et de rayon a , on envisage sa construction à partir d'adjonction successives de couches sphériques de même densité volumique de charge ρ . A la surface du noyau de rayon r en cours de construction, où règne le potentiel $V^*(r)$, est appliquée une couche d'épaisseur dr , supposée prise à l'infini, à potentiel nul.

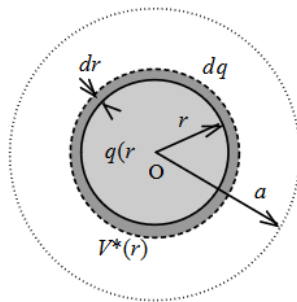


Figure 1 : Noyau en cours de construction

On montre que le champ et le potentiel observés à l'extérieur d'une boule portant une charge Q uniformément distribuée, sont identiques à ceux produits par une charge ponctuelle rassemblant toute la charge Q au centre de ladite boule.

5) Exprimer la charge $q(r)$ du noyau de rayon r en cours de construction en fonction de Q, r et a .

6) Exprimer $V^*(r)$, le potentiel à la surface du noyau de rayon r en cours de construction, en fonction de Q, r et a .

7) Exprimer $dq(r)$, la charge élémentaire contenue dans la couche sphérique $[r, r + dr]$, en fonction de Q, r, a et dr

8) Exprimer dW , le travail des forces électriques s'exerçant sur la couche $[r, r + dr]$ durant son déplacement entre sa position initiale à l'infini (où $V = 0$) et la surface du noyau en cours de construction (rayon r).

9) Analyser le signe de dW

10) Exprimer le travail W exercé par les forces électriques à l'occasion de la construction du noyau dans sa totalité-on exprimera W en fonction des seuls paramètres Q et a

11) En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrique U_e .

Exercice 2

A1) D'après les résultats de Coulomb $\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ et $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$	/1
A2) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$	/1
A3) Par définition, $W_q = \int_{AB} q\vec{E} \cdot d\vec{OM}$	/1
A2) $W_q = \int_{AB} q\vec{E} \cdot d\vec{OM} = -\int_{AB} qdV = -q(V_B - V_A)$	/1
B4) $q(r) = \rho * \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \left(\frac{r}{a}\right)^3$	/1
B5) Avec les résultats précédents $V^*(r) = \frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$	/1
B6) Il s'agit d'apprécier la charge dans une coquille sphérique d'épaisseur dr : $dq(r) = \rho * 4\pi r^2 dr = \frac{3Q}{a^3} r^2 dr$	/1
B7) $dW = -dqV^* = -\frac{3Q^2 r^4}{4\pi\epsilon_0 a^6} dr$	/1
B8) $dW < 0$ car la force est répulsive pendant cette phase de rapprochement.	/1
B9) d'où : $W = -\frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$	/1
B10) d'où : $U_e = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$	/1