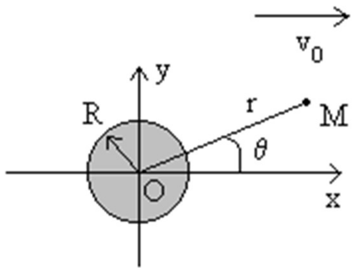
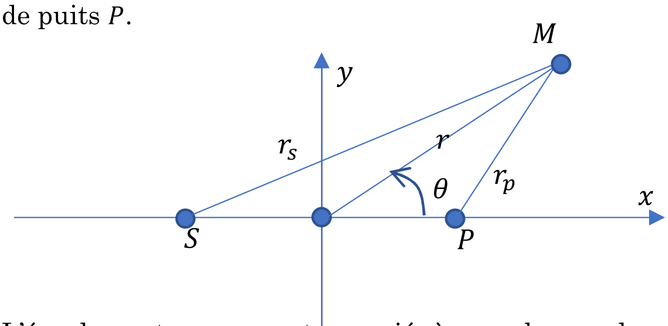
Un cylindre immobile de rayon de base R et d'axe Oz est placé dans un fluide dont l'écoulement loin de cet obstacle se fait à vitesse uniforme $v_0\overrightarrow{u_x}$. Pour étudier l'effet du cylindre sur l'écoulement supposé incompressible (de masse volumique ρ) et stationnaire, on utilise une méthode de superposition.



La présence du cylindre est modélisée par l'association d'une source S en $(-d, 0, z)$ (écoulement radial divergent permettant de « repousser » l'écoulement) et d'un puits P en $(+d, 0, z)$ (écoulement radial convergent permettant de contourner l'obstacle), de même débit volumique par unité de longueur D. On note $r_s = SM$ et $r_p = PM$ les distances radiales respectivement depuis l'axe de la source S et de puits P.



L'écoulement source est associé à un champ des vitesses radial divergent centré sur S et donné par $v_s = \frac{D}{2\pi r_s}$ et l'écoulement puits à un champ des vitesses radial convergent sur P et donné par $v_P = \frac{-D}{2\pi r_P}$

Dans ces conditions, on peut associer une fonction scalaire $\phi_S(r_s)$ au champ des vitesses de S tel que :

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{grad}\phi_S$$

1) Calculer $\phi_S(r_s)$ à une constante près que l'on choisira nulle par la suite.
2) On a aussi $\overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{grad}\phi_P$ de manière analogue calculer $\phi_P(r_P)$ à une constante près que l'on choisira nulle par la suite
3) Par superposition, donner l'expression du potentiel $\phi_d(r_s, r_p)$ associé à ce dipôle source-puits.
4) On envisage la limite du doublet précédent lorsque $d \to 0$ et $D \to \infty$ mais de telle sorte que le produit $2Dd$ demeure égal à une valeur finie notée $p = 2Dd$.
Montrer alors $\phi_d(r,\theta) \approx \frac{p}{2\pi r} cos\theta$ en un point M en repérage cylindrique à l'aide d'un développement limité.

Aide :

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OM}$$

$$SM^2 = \overrightarrow{SM}^2 = SO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OM}$$

$$SM^2 = d^2 + r^2 + 2drcos(\theta)$$

Et : $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ si $\varepsilon \ll 1$

5) Donner le potentiel $\phi_\infty(r,\theta)$ associé à l'écoulement de vitesse $v_0\overrightarrow{u_x}$
6) En déduire le potentiel total ($\phi_{tot} = \phi_d + \phi_\infty$) puis obtenir le champ des vitesses associé.
7) Monter que la condition imposée à l'écoulement en $r = R$ conditionne l'expression du champ des vitesses p. En déduire une expression de $\vec{v}$ en fonction de r, R, θ.
8) Il est possible de tracer l'allure de quelques lignes de champ de cet écoulement avec Python. Pour cela, on décrit l'écoulement en repérage cartésien avec donc $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Compléter le programme suivant permettant de tracer quelques lignes de champ :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#constantes#
v0=10
R=5

#definition des points de mesure
x0 = y0 = np.linspace(-10,10,20)
x, y = np.meshgrid(x0,y0) #génère le maillage de points associés à chaque mesure
#définition des champs#
r=(x**2+y**2)**0.5

...........................
...........................
...........................
...........................

#limitation du domaine de définition#
vx[r<R]=vy[r<R]=0
v=(vx**2+vy**2)**0.5

 #tracé#

plt.streamplot(..........)#lignes de champ
plt.show()
```