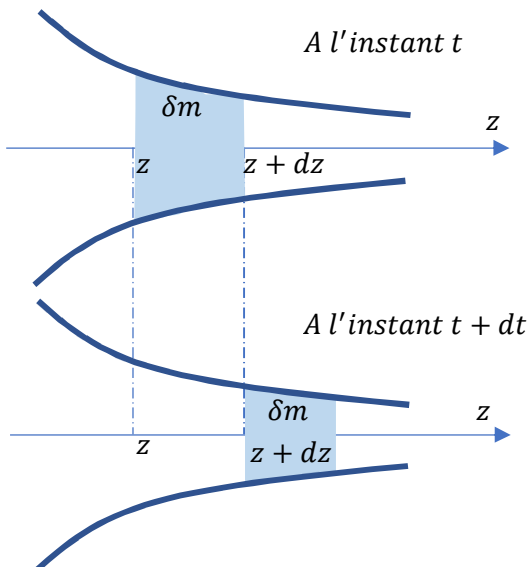


On considère l'écoulement d'un gaz dans une conduite de section  $S$  variable en utilisant les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est stationnaire et réversible.
- La conduite est parfaitement calorifugée et ne présente aucune machine avec des parties mobiles.
- La conduite est horizontale et d'axe  $Oz$  ce qui permet de négliger les variations d'énergie potentielle du gaz en écoulement.
- Le gaz en écoulement est un gaz supposé parfait de coefficient isentropique  $\gamma$  et de masse molaire  $M$ .

On note  $T$  le champ des températures,  $c$  le champ des vitesses,  $P$  le champ des pressions et  $\mu$  la masse volumique. Toutes ces grandeurs physiques dépendent de la variable  $z$ .

Le système étudié est une tranche  $\delta m$  de fluide qui à l'instant  $t$  est à la côte  $z$  et à l'instant  $t + dt$  se trouve à la côte  $z + dz$ .



- 1) Démontrer, en utilisant le 1<sup>e</sup> premier principe des systèmes fermés, que :

$$\frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)} dT = -\frac{dc^2}{2}$$

Où  $dT = T(z + dz) - T(z)$

Le débit massique  $D_m$  vérifie une relation du type  $D_m = \mu^\phi c^\psi S^\beta$  où  $\phi, \psi$  et  $\beta$  sont des constantes.

- 2) En effectuant une analyse dimensionnelle, déterminer les valeurs de  $\phi, \psi$  et  $\beta$ .
- 3) Démontrer alors que  $\frac{d\mu}{\mu} + \frac{dc}{c} + \frac{dS}{S} = 0$  en utilisant la méthode de la différentielle logarithmique.
- 4) Justifier que le rapport  $\frac{T(z)}{\mu(z)^{\gamma-1}}$  est constant en tout point de la canalisation.
- 5) En déduire alors que  $\frac{dT}{T} - (\gamma - 1) \frac{d\mu}{\mu} = 0$
- 6) A l'aide des résultats obtenus, montrer que  $\frac{dc}{c} = \frac{dS}{S} \frac{1}{M^2 - 1}$  où  $M$  est le nombre de Mach défini tel que  $M = \frac{c}{c_0}$  avec  $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

On donne ci-dessous une photo d'une tuyère de Laval découpée en deux et utilisée pour la propulsion d'une fusée.



- 7) Décrire et justifier la géométrie de cette tuyère permettant l'éjection rapide des gaz et donc la propulsion d'une fusée.