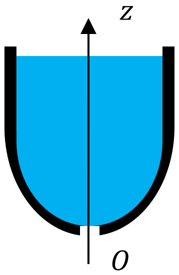
Un récipient, à symétrie de révolution autour de l'axe Oz, que $S(z) = S_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^n$, se vidange à travers un orifice O de <u>très faible</u> section s percé au fond. L'intensité de champ de pesanteur est $g = 10 m.s^{-2}$. On admettra que l'on peut utiliser la relation de Bernoulli entre un point de la surface libre et O.



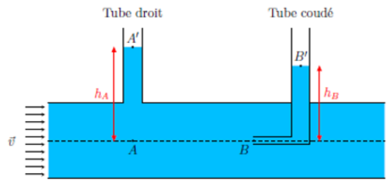
1) Exprimer l'équation différentielle vérifiée par la variation de l'altitude $\frac{dz}{dt}$ du niveau de l'eau $z(t)$. /3

2) Déterminer la valeur de n qui permet d'avoir une hauteur de liquide $z(t)$ qui soit linéaire avec le temps. /2

3) Donner le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant dans le cas d'un écoulement stationnaire et non conservatif d'un fluide parfait et incompressible (on note le travail massique indiqué w_i échangé avec les parties mobiles de la machine rencontrée). On donnera le nom et l'unité de tous les paramètres introduits. /2

4) On considère de l'eau en écoulement stationnaire. L'eau est assimilée à un fluide incompressible et parfait s'écoulant uniformément avec une vitesse horizontale v par rapport à la conduite. On place sur la conduite :
- un tube en verre coudé
- Un tube droit

On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre. Appliquer Bernoulli puis exprimer la vitesse de l'écoulement en fonction des données du sujet.

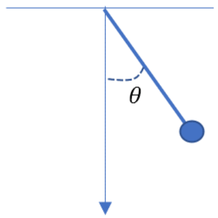


/4

On considère un pendule de longueur l dans le champ de pesanteur terrestre g et repéré par l'angle $\theta(t)$. On démontre que $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

Avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.



Pour résoudre numériquement cette équation on utilise :

- Un formalisme de Cauchy consistant à traiter le problème comme un problème d'orde 1 avec le vecteur $\vec{y} = \begin{pmatrix}\theta(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{pmatrix}$ et tel que $\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{y}, t)$.
- Chaque dérviée première est approximée par une formule de différence finie progressive. Chaque

échantillon est associé à un triplet $(t_i = iT_e, \theta_i, \dot{\theta}_i)$ avec T_e la période d'échantillonnage

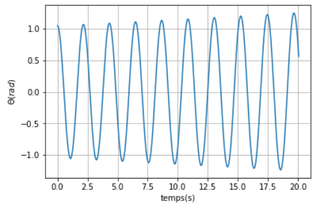
- On va estimer $\vec{f}(\vec{y},t)$ à l'instant t_i (schéma d'Euler explicite).

5) Montrer alors que $\begin{pmatrix} \theta_{i+1} = \theta_i + T_e\dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i - T_e\omega_0^2 \sin(\theta_i) \end{pmatrix}$

6) Remplir les instructions suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#constantes
g=9.81          #champ de pesanteur terrestre
l=1             #longueur du pendule
w0=(g/l)**0.5 #pulsation propre
T0=2*np.pi/w0 #période propre
Te=T0/1000    #période d'échantillonnage (avec une certaine marge)

#variable
t=np.arange(0,10*T0,Te)     #tableau des temps
y=np.zeros((2,len(t)))      #tablaue 2D : une ligne pour theta et l'autre pour sa dérivée

#initialisation
y[0,0]=60*np.pi/180         #angle initiale de 60°
#schéma Euler explicite

for i in range(……………………….):
    y[0,i+1]=………………………………………….
    y[1,i+1]=…………………………………………….

#représentation graphique de théta(t)
plt.plot(………………………….)
plt.show()
```

7) Le résultat de la simulation numérique est donné ci-contre. Commenter



Pour résoudre ce problème, on préfère un schéma d'Euler semi-explicite qui est intégré dans le module odeint. On donne ci-dessous un exemple d'utilisation :

```
from scipy.integrate import odeint
#exemple pour résoudre : X''=-aX
# On précise notre constante
a=1000
# On crée la liste des temps : 1000 points entre t=0 et t=50.
temps = np.linspace(0, 10,1000)
#état initial
Y0=[10,0]
# L'équation différentielle est présentée sous la forme d'une fonction :
def equation(Y,temps):
    return [Y[1],-a*Y[0]*Te]
#On résout notre équation différentielle et on récupère la liste des résultats
Y=odeint(equation, Y0, temps)#
#On affiche le résultat des Y en fonction du temps
X=Y[:,0]
plt.plot(temps,X)
plt.show()
```

8) Remplacer la partie du programme ci-contre pour résoudre l'équation différentielle du pendule avec odeint