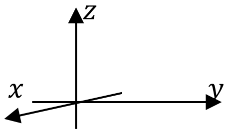
Devoir_cours_8 Nom : Prénom : TSI2

Soit un champ $\vec{a}$ décrit en repérage cylindrique (avec K constante positive) : $\vec{a}(M) = K\theta^2\overrightarrow{u_\theta}$

1) Dessiner quelques lignes de champ /1



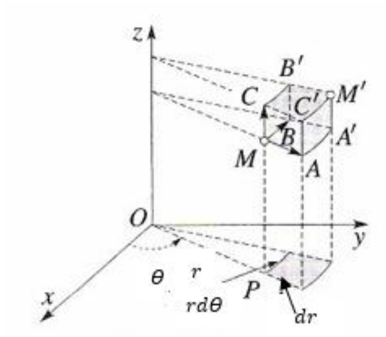
On donne l'expression de l'opérateur divergent en repérage cylindrique :

$$div\vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

/1

2) Calculer $div\vec{a}$ à partir de l'expression de la définition de l'opérateur divergent /2

3) Effectuer un bilan de flux du champ $\vec{a}$, donné par $\sum_i \vec{a}.d\overrightarrow{S_{i,ext}}$, à travers les surfaces élémentaires $d\overrightarrow{S_i}$ délimitant le volume $dV = rdrd\theta dz$ dessiné ci-dessous. Montrer alors que $\sum_i \vec{a}.d\overrightarrow{S_{i,ext}} = div\vec{a}dV$.



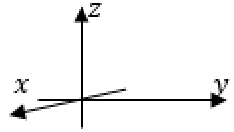
4) On considère les champs de vecteurs suivants décrits en repérage cartésien :

- $\overrightarrow{a_1} = x^2\overrightarrow{u_x} + y^2\overrightarrow{u_y} + z^2\overrightarrow{u_z}$
- $\overrightarrow{a_2} = y^2\overrightarrow{u_x} + y^2\overrightarrow{u_y} + z^2\overrightarrow{u_z}$
- $\overrightarrow{a_1} = y^2\overrightarrow{u_x} + z^2\overrightarrow{u_y} + x^2\overrightarrow{u_z}$

Calculer la divergence de ces 3 vecteurs et en déduire sa valeur au point $A(1,1,1)$

Soit un champ $\vec{a}$ décrit en repérage sphérique (avec K constante positive) : $\vec{a}(M) = K\overrightarrow{u_r}$

5) Dessiner quelques lignes de champ /1



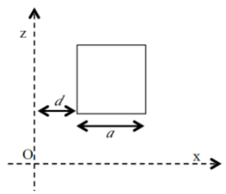
On donne l'expression de l'opérateur divergent en repérage sphérique :

$$div\vec{a}(M) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2 a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{rsin\vartheta}\frac{\partial a_\vartheta sin\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{rsin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

/1

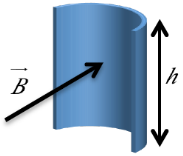
6) Calculer $div\vec{a}$ à partir de l'expression de la définition de l'opérateur divergent

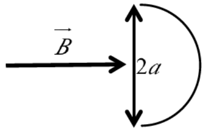
7) Soit un champ de vecteur décrit en repérage cylindrique par $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{u_\theta}}{r}$. Calculer le flux ϕ de ce vecteur à travers le cadre carré contenu dans le plan (xOz) et distant de d de l'axe Oz. /2



Devoir_cours_8 Nom : Prénom : TSI2

8) Soit un champ de vecteur $\vec{B} = B_0\overrightarrow{u_x}$ uniforme. Calculer le flux de ce champ de vecteur à travers le demi cylindre de rayon a.





9) Donner l'unité du vecteur densité de flux de masse $\vec{j}$.

10) Définir le débit massique D_m d'un écoulement à travers une section S en fonction de $\vec{j}$ (a priori non uniforme sur S).

11) On rappelle l'équation de conservation de la masse décrivant l'évolution temporelle $m(t)$ d'un volume V de contrôle :

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\oiint \vec{j}.\overrightarrow{dS_{ext}}$$

a) Réécrire la relation précédente en utilisant le théorème d'Ostrogradski.

b) Que vaut $div\vec{j}$ si l'écoulement est stationnaire et comment est alors qualifié le flux de $\vec{j}$?

c) Donner l'expression de $div\vec{v}$ si le fluide est incompressible. Commenter la valeur du débit volumique le long de long de l'écoulement.

12) On considère un écoulement stationnaire décrit en repérage cartésien défini par (k est une constante) :

$$\vec{v}(x,y) = kx\overrightarrow{u_x} - ky\overrightarrow{u_y}$$

a) Cet écoulement est-il incompressible ?

b) Soit $d\overrightarrow{OM}$ un déplacement le long d'une ligne de courant. Calculer $\vec{v} \wedge d\overrightarrow{OM}$?

c) Donner alors l'équation des lignes de champ et tracer l'allure de quelques lignes de champ.