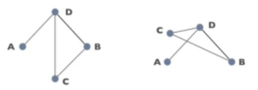
Chapitre 14 : Les graphes : vocabulaire et représentations

I- Définitions

a) Vocabulaire

- Un graphe $G(S, A)$ est un ensemble de sommets S et de relations A entre ces sommets (A liste l'ensemble des arêtes reliant 2 sommets sachant qu'il n'y a que 1 ou 0 arête entre chaque paire de sommet)



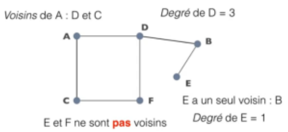
$S = \{A, B, C, D\}$

$A = \{\{A, D\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{C, B\}\}$

- L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets qui le compose
- Si nous supposons un sens de parcours des arêtes, nous disons que le graphe est orienté. Les arêtes ont alors un sens et sont appelées arc.

un graphe non orienté — un graphe orienté

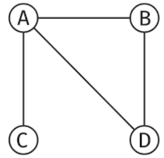
- Deux sommets reliés directement par une arête (ou un arc si graphe orienté) sont dits adjacents
- Si le graphe est orienté, une arête a une extrémité initiale (ou un sommet de départ, ou une origine, ou un prédécesseur), et une extrémité finale (ou sommet d'arrivée, une extrémité ou un successeur).
- Le nombre $d(s)$ de voisins d'un sommet s est son degré. C'est le nombre d'arêtes liées à ce sommet. On dit que ces arrêtes lui sont incidentes, un sommet peut avoir un degré 0 (aucune arête), on dit qu'il est isolé.



- Si un graphe est orienté, un sommet s a alors un degré entrant $d_-(s)$ et un degré sortant $d_+(s)$. Son degré est $d(s) = d_+(s) + d_-(s)$.
- Si deux sommets quelconques d'un graphe sont adjacents (un sommet quelconque est relié directement à tous les autres), alors le graphe est dit complet.
- Une arrête A de type $A = \{x, x\}$ est une boucle

b) Chemin et connexité dans un graphe non orienté :

- Un chemin de s_0 à s_n est une séquence $(s_0, s_1, , .. s_n)$ ou deux sommets consécutifs sont adjacents.
- La longueur d'un chemin est le nombre d'arrêtes utilisées pour aller de s_0 à s_n.
- Un graphe est connexe si pour tout couple de sommets, il existe un chemin reliant ces deux sommets.
- Un cycle est un chemin tel que le sommet de départ et d'arrivée sont identiques.



$[ABDA]$ est un cycle

$[ABD]$ est une chemin de longueur 2

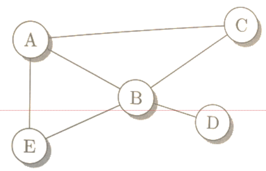
c) Poids et étiquette

- Un graphe est pondéré si un nombre, appelé poids, est associé à chaque arête ou chaque arc.
- Un graphe est étiqueté si un texte, appelé étiquette, est associé chaque arête ou chaque arc

II- Liste et matrice d'adjacence

a) Pour les graphes non orientés et non pondérés

On peut représenter un graphe non orienté en précisant pour chacun de ses n sommets la listes de ses voisins : c'est la liste d'adjacence.



$A: B, C, E \quad B: A, C, D, E \quad C: B, A \quad D: B \quad E: A, B$

La matrice d'adjacence est un tableau $n \times n$, à l'intersection d'une ligne i et d'une colonne j, le nombre 1 représente la présence et 0 pour l'absence d'une arrête.

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	1	0	1	1	1
C	1	1	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	1	1	0	0	0

Commenté [AM1]: Pourquoi les graphes ?
C'est une théorie qui est adapté pour décrire et résoudre des problèmes importants :
-La recherche du parcours le plus rentable en logistique des transports
- Le routage électrique le plus courts pour la fabrication de cartes électriques
-L'élaboration de réseau informatique internet (une machine est sommet, une connexion est une arrête). On fait le choix du meilleurs protocoles pour échanger entre les machines
-Pour représenter des molécules
-Le système world wide web fonctionne avec des pages web reliées entre elles par des liens hypertextes. Les pages sont les sommets, les liens sont les arêtes. Ces liens sont pondérés (par exemple avec le nombre de vues) afin de donner l'importance à chaque page

Commenté [AM2]: Dans un graphe orienté, une arrête a un sens et ne peut être emprunté que dans ce sens. On parle alors de chaîne plutôt que de chemin

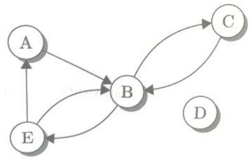
Commenté [AM3]: un graphe complet est donc forcément connexe

Commenté [AM4]: Dans un réseau routier, un poids peut être le nombre de km d'une route entre deux lieux et une étiquette peut être le nom de cette route.

Commenté [AM5]: L'ordre d'écriture n'a pas d'importance

b) <u>Pour les graphes orientés non pondéré</u>

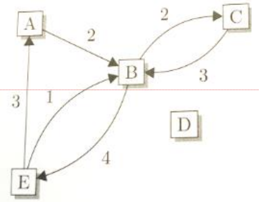
Dans le cas des graphes orientés, on peut définir une liste des successeurs et une liste des prédécesseurs. La matrice d'adjacence obtenue n'est alors pas symétrique.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) <u>Pour les graphes orientés pondérés</u>

Pour les listes d'adjacence (ici successeur), on complète avec les informations :



$A:(B,2)$ $B:(C,2)$ $(E,4)$ $C:(B,3)$

$D:$ $E:(A,3),(B,1)$

Commenté [AM6]: Ou avec une matrice d'adjacence :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III- <u>Implémentation en python</u>

a) <u>Matrice d'adjacence</u>

Pour n sommets, la matrice d'adjacence est obtenue en déclarant un tableau $n \times n$ (numpy ou liste de listes) contenant des valeurs nulles

Tableau numpy	Liste de liste
$tab = np.zeros((n,n))$	$tab = [[0,0,\ldots 0],[$

Le tableau est ensuite complété à l'aide du graphe

b) <u>Dictionnaire ou Liste des listes d'adjacence</u>

Pour les graphes orientés ou non, on peut utiliser des listes ou des dictionnaires pour accéder aux listes d'adjacence :

Avec une liste des listes d'adjacence	Avec des dictionnaires : Clés ⇔ sommets Arêtes ⇔ listes des sommets adjacents

`liste=[["A",["B"]],`
`["B",["C","E"]],`
`["C",["B"]],`
`["D",[]],`
`["E",["A","B"]]]`
	`dic={"A":["B"],`
	`"B":["C","E"],`
	`"C":["B"],`
	`"D":[],`
	`"E":["A","B"]}`

Pour les graphes orientés, et pondéré, on peut utiliser les dictionnaires :

```
dic={"A":[("B",2)],
     "B":[("C",2),("E",4)],
     "C":[("B",3)],
     "D":[],
     "E":[("A",3),("B,1")]}
```