Chapitre 5 : Algorithmes dichotomiques

I- Recherche dichotomique d'un élément dans une liste triée

a) Principe

Le coût d'une recherche naïve d'un élément dans une liste triée de longueur n est linéaire en n dans le pire cas qui consiste à tester tous les éléments de la liste.

```
def recherche_naive(L,elt):
    for i in range(len(L)):
        if L[i]==elt:
            return print("l'élt {0} est à l'indice
{1}".format(elt,i))
    print("l'élément n'est pas dans la liste")
```

L'intérêt de la méthode dichotomique est d'accélérer grandement la recherche. Le principe est de comparer l'élément avec celui se trouvant au milieu de la liste $L[n//2]$. S'ils sont égaux, c'est terminé, sinon on recommence avec la partie du tableau pouvant contenir l'élément.

b) Programmation

```
def recherche_dicho(L,elt):
    index_debut=0
    index_fin=len(L)-1
    while index_fin>=index_debut:
        index_milieu=(index_fin+index_debut)//2
        if L[index_milieu]==elt:
            return (print("l'élt {0} à
l'indice{1}".format(elt,index_milieu)))
        elif elt>L[index_milieu]:
            index_debut=index_milieu+1
        else :
            index_fin=index_milieu-1
    print("l'élément n'est pas dans la liste")
```

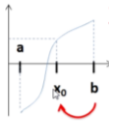
c) Complexité

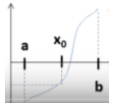
Considérons une liste de longueur n telle que $n = 2^p - 1$.Le principe de la méthode dichotomique consiste à retirer l'élément centrale, il reste alors $2^p - 2$ éléments et à ne conserver que l'une des deux sous-listes (de longueur $2^{p-1} - 1$). On continue k fois cette opération jusqu'à ce que $2^{p-k} - 1 = 0$ soit $k = p = \log_2(n)$. Si t est le temps pour trouver une valeur dans une liste de longueur n alors pour une liste de longueur $1000n$ ce temps est $\log_2(1000t) = 10 + t$.

Si $n = 100$, 7 étapes suffisent, pour $n = 1000$, 10 étapes suffisent.

II- Résolution d'une équation du type $f(x) = 0$ par dichotomie

Le principe de dichotomie s'applique en mathématiques pour trouver une solution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a, b]$ à epsilon près. La fonction f est supposée monotone et continue.






```
def solve_dicho(f,a,b,epsilon):
    debut=a
    fin=b
    while abs(debut-fin)>epsilon:
        x0=(debut+fin)/2
        if f(x0)*f(debut)<=0:
            fin=x0
        else :
            debut=x0
    return (debut+fin)/2
```

III- Exponentiation rapide

Il s'agit d'écrire une fonction *puissance* qui prend en paramètre un flottant x non nul et un entier naturel n et qui renvoie x^n.

Dans une version naïve, on calcule successivement $x^2, x^3, \ldots$ en se basant sur la définition $x^n = 1 \times x \times x \ldots \times x$ où $n \geq 0$ est le nombre de facteur égaux à x (donc n multiplications):

```
def expo_naif(x,n):
    resultat=1
    for i in range(n):
        resultat=resultat*x
    return resultat
```

On peut procéder par dichotomie : $\begin{cases} n\ pair \rightarrow x^n = (x^2)^{n//2} \\ n\ impair \rightarrow x^n = x(x^2)^{n//2} \end{cases}$

```
def expo_dicho(x,n):
    resultat=1
    while n!=0:
        if n%2==1:
            resultat=resultat*x
        x=x**2
        n=n//2
    return resultat
```

Là encore si $n = 2^p - 1$ alors le nombre d'itérations est en $\log_2(n)$

Commenté [AM1]: Le mot dichotomie est formé sur le grec, dikha, en deux et tomia qui signifie division.
Dichotomie = division en deux parties
C'est donc une méthode basée sur la stratégie de type diviser pour régner.
En écriture binaire, si on écrit $n \approx 2^{MSB}$
Alors $MSB \approx log_2(n)$ et donc le nombre de bits nécessaire pour écrire n est $log_2(n)$
Donc avec la méthode dichotomique, à chaque division :
$n' = \frac{n}{2} \approx 2^{MSB'}$,
$soit\ MSB' \approx \log_2(n') \approx \log_2(n) - 1$
A chaque étape de la division on perd un digit en binaire.

Commenté [AM2]: Si on cherche le 33 dans la liste ci-dessous :
$indice - debut = 0$
$indice - fin = 10$
$indice - milieu = 5$
[15,16,18,19,23, **24**, 28,29,31,33]
Comme $33 > 24$, on travaille ensuite avec la sous-liste de droite :
$indice - debut = 6$
$indice - fin = 10$
$indice - milieu = 8$
[28,29, **31**, 33]
Comme $31 < 33$, on travaille ensuite avec la sous-liste de droite :
$indice - debut = 9$
$indice - fin = 10$
$indice - milieu = 9$
[**31**, 33]
On note la nécessité du »>= » pour cette dernière étape :
$indice - debut = 10$
$indice - fin = 10$
...

Commenté [AM4]: On peut rapidement se persuader de l'efficacité de la méthode :
$x^{100} = (x^2)^{50} = A^{50}$
$x^{100} = (A^2)^{25} = B^{25}$
$x^{100} = B(B^2)^{12} = BC^{12}$
$x^{100} = B(C^2)^6 = B(D)^6$
$x^{100} = B(D^2)^3 = B(E)^3$
$x^{100} = BE(E^2)^1 = BE(F)^1$
$x^{100} = BEF$
Soient 7 étapes

Commenté [AM3]: Cette preuve se fait en cherchant une propriété invariante lors des différentes itérations : on parle d'invariant de boucle