

Exercice 1 : Avec un gaz parfait

Dans tout l'exercice, le nombre de mole n de gaz parfait est supposé constant et on note P sa pression, V son volume et T sa température.

- 1) Montrer, à l'aide de l'équation d'état des gaz parfait, que : $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial V}}$
- 2) Montrer que l'équation d'état des gaz parfait vérifie également :

$$\frac{\partial V}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial V} = -1$$

Les résultats précédents, bien que démontrés dans le cas du gaz parfait, sont tout à fait généraux et sont valables pour tout système thermoélastique d'équation d'état $V(T, P)$: c'est ce que propose l'exercice suivant

Avec l'équation d'état d'un gaz parfait :

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{V}{T}$$

Et :

$$\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{P}{nR} = \frac{T}{V}$$

Donc :

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial V}}$$

De même :

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{V}{P}$$

Et :

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V} = \frac{P}{T}$$

Donc :

$$\frac{\partial V}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial V} = -1$$

Exercice 2 : Avec un système thermo-élastique quelconque

Soit un système fermé, thermo-élastique, caractérisé par la fonction d'état $V(T, P)$ pouvant aussi s'écrire $P(T, V)$ ou $T(P, V)$. Nous allons chercher à écrire des relations entre les dérivées partielles de ces fonctions

- 1) Exprimer la différentielle dV en fonction des dérivées partielles adéquates
- 2) Exprimer la différentielle dT en fonction des dérivées partielles adéquates et montrer alors que la relation précédente permet d'écrire $dV = \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial V}} \left(dT - \frac{\partial T}{\partial P} dP \right)$
- 3) Par identification, montrer que $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial V}}$
- 4) En déduire aussi que :

$$\frac{\partial V}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial V} = -1$$

De manière générale, on a :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial T} dT + \frac{\partial V}{\partial P} dP \quad (1)$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial V} dV + \frac{\partial T}{\partial P} dP \quad (2)$$

$$(2) \text{ donne aussi : } dV = \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial V}} \left(dT - \frac{\partial T}{\partial P} dP \right)$$

Cette relation doit être vraie pour toute variation, y compris $dP = 0$ ce qui donne avec (1) : $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial V}}$

$$\text{Et : } -\frac{\frac{\partial T}{\partial P}}{\frac{\partial T}{\partial V}} = \frac{\partial V}{\partial P}$$

$$\text{Soit : } \frac{\partial V}{\partial P} \frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{1}{\frac{\partial P}{\partial T}}$$

$$\text{Et : } \frac{\partial V}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial V} = -1$$

Cette relation s'appelle relation triangulaire : la première dérivée partielle ayant été écrite, les autres s'en déduisent par permutation circulaire portant à la fois sur le numérateur, le dénominateur et la grandeur maintenue constante.

Exercice 3 : Application

Un morceau solide de métal est pris à 20°C sous une pression de 1 bar. Déterminer la pression qu'il faut exercer sur ce métal pour que son volume reste constant alors que sa température passe à 30°C . On donne $\alpha = 5.10^{-5} \text{ K}^{-1}$ et $\chi_T = 7.10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$.

$$\frac{\partial V}{\partial P} \times \frac{\partial P}{\partial T} \times \frac{\partial T}{\partial V} = -1$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial P} \frac{\partial T}{\partial V}} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial T}}{\frac{\partial V}{\partial P}} = \frac{\alpha}{\chi_T}$$

$$\Delta P = \frac{\alpha}{\chi_T} \Delta T = \frac{5.10^{-5}}{7.10^{-12}} 10 \approx 700 \text{ bar}$$