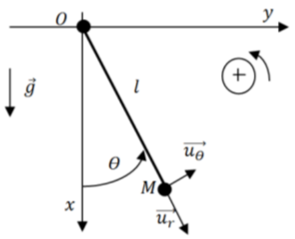
Tous les théorèmes de la mécanique du point

Exercice 1 : Le pendule du professeur Tournesol

On considère un pendule constitué par les éléments suivants et étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ de centre O supposé galiléen :

- Une masse m ponctuelle repérée par le point M,
- Un fil souple et inextensible (donc de longueur l constante) et de masse négligeable : l'étude du mouvement du pendule se limite à celui du point M.
- On prendra une origine de l'énergie potentielle en $\theta = \frac{\pi}{2}$



A) Mouvement sans frottement

On néglige tout frottement et on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

1) Donner les expressions des vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\overrightarrow{v_M}$ et accélération $\overrightarrow{a_M}$ du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.
2) Donner l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ en utilisant :

- La 2e loi de Newton
- Le théorème du moment cinétique
- Le théorème de la puissance mécanique
- Le théorème de la puissance cinétique

On suppose que l'amplitude des oscillations est faible, on se place alors dans l'approximation harmonique. $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta_0}$.

3) Donner l'expression de $\theta(t)$
4) Donner l'expression de $\dot{\theta}(t)$
5) Tracer $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ
6) Quelle est la période d'oscillation de l'énergie cinétique ?

B) Mouvement avec frottement

On suppose que le pendule est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\overrightarrow{v_M}$

1) Donner l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ en utilisant :

- La 2e loi de Newton
- Le théorème du moment cinétique
- Le théorème de la puissance mécanique
- Le théorème de la puissance cinétique

On suppose que l'amplitude des oscillations est faible, on se place alors dans l'approximation harmonique. $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. On pose $M = \frac{h}{2m}\sqrt{\frac{l}{g}} \ll 1$

1) Donner une expression approchée de $\theta(t)$
2) Donner une expression approchée de $\dot{\theta}(t)$
3) Tracer $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ
4) Exprimer l'énergie mécanique $E_m(t)$?

$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$ et d'après le TMC : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = -mglsin\theta\overrightarrow{u_z}$ soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$

Petit signifie ici $|\theta_0| < 10°$ et ainsi la linéarisation donne $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$. La pulsation d'oscillation est alors $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

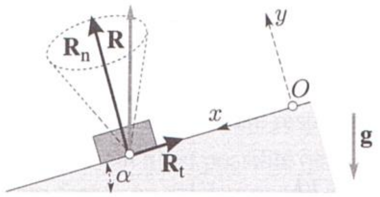
Avec les conditions initiales $\theta(t) = \frac{\dot{\theta_0}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

Avec le frottement fluide : $\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ et dans le cas d'un régime pseudo-périodique : $\theta(t) = \theta_0 e^{-M\omega_0 t}\left(\cos(\omega_a t) + \frac{M}{\sqrt{1-M^2}}\sin(\omega_a t)\right)$ avec $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-M^2}$

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-M\omega_0 t}\cos(\omega_a t)$$

Exercice 2 : frottement solide

Proposer puis réaliser un protocole permettant de mesurer le coefficient de frottement de glissement entre votre règle et votre gomme.



Système : Point matériel M de masse m

Référentiel : Référentiel du laboratoire supposé Galiléen

Repère d'espace : Repère cartésien $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$

Bilan de force : le poids $\vec{P}$ et la réaction du support $\vec{R}$

On applique alors le PFD dans la base de projection sachant que le mouvement est à une dimension.

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}\overrightarrow{u_x}\\\overrightarrow{u_y}\end{matrix} = \begin{pmatrix}mgsin\alpha - R_T\\-mgcos\alpha + R_N\end{pmatrix}\begin{matrix}\overrightarrow{u_x}\\\overrightarrow{u_y}\end{matrix}$$

Tant que la brique est immobile alors son accélération est nulle et :

$$\begin{pmatrix}mgsin\alpha = R_T\\mgcos\alpha = R_N\end{pmatrix}$$

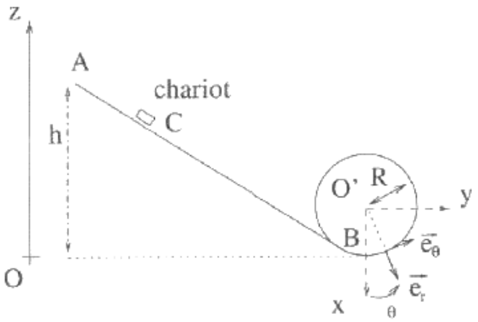
On obtient alors le rapport suivant : $tan\alpha = \frac{R_T}{R_N}$

Dans la situation statique, on a alors : $tan\alpha < f_S$

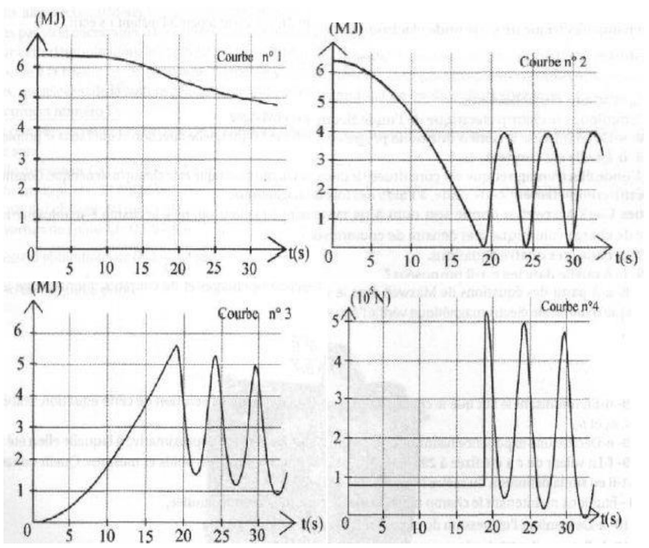
On a alors l'égalité et mise en mouvement quand $tan\alpha_c = f_S$

Exercice 3 : Profils d'énergie

Une gouttière à l'allure ci-dessous. On lâche un point matériel de masse m, du point A avec une vitesse initiale nulle. Le mouvement se fait sans frottement et dans le plan vertical. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur sera prise au sol.



1) Donner l'expression de l'énergie mécanique en A.
2) On repère la position du mobile par l'angle θ dans la partie circulaire de rayon a. Donner l'expression de l'énergie mécanique dans la partie circulaire en fonction de a, θ et le module v de la vitesse du point M sur ce parcours circulaire.
3) Déduire des questions précédentes une expression de $\frac{mv^2}{a}$en fonction de θ et de constantes
4) Choisir une base adaptée et étudier le mouvement dans la partie circulaire avec la RFD. En déduire alors l'expression du module $N(\theta)$ de la réaction du support.
5) De quelle hauteur h doit-on lâcher le point matériel pour qu'il effectue un tour complet du cercle intérieur ?
6) Associer à chaque courbe expérimentale la grandeur associée sachant que l'énergie potentielle est prise nulle en B



L'absence de frottement et en prenant une énergie potentielle de pesanteur dont l'origine est « sur le sol » alors :$E_m = mgh = \frac{mv^2}{2} + mga(1 - cos\theta)$

La 2e loi de Newton donne :

$$m\begin{pmatrix} -a\dot{\vartheta}^2 \\ a\ddot{\vartheta} \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} -\frac{v^2}{a} \\ a\ddot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mgcos\vartheta \\ -mgsin\vartheta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -N \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$N = m\frac{v^2}{a} + mgcos\vartheta = \frac{2mgh}{a} - 2mg(1 - cos\vartheta) + mgcos\vartheta$$

$$N = \frac{2mgh}{a} - 2mg + 3mgcos\vartheta$$

Donc si an A ($\vartheta = \pi$) on a :$N > 0$

Alors :$h > \frac{5}{2}a$

Pour une position quelconque, on a décollement pour

$$\frac{2mgh}{a} - 2mg + 3mgcos\vartheta = 0$$

Soit :

$$cos\vartheta = \frac{2}{3}(1 - \frac{h}{a})$$

Soit une altitude de :

$$z_d = a(1 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h}{a}\right) = \frac{a}{3}(1 + 2\frac{h}{a})$$

La courbe 1 représente l'énergie mécanique, la courbe 2 représente l'énergie potentielle, la courbe 3 représente l'énergie cinétique et la courbe 4 donne la représentation de la réaction normale du support

Exercice 4 : Kepler :

On définit la vitesse d'évasion ou vitesse de libération comme la vitesse minimale v_l pour laquelle l'état du point M, initialement lié, devient libre ; l'énergie mécanique minimum à atteindre doit donc être nulle.

1) A quelle distance doit être un satellite en orbite géostationnaire (c'est-à-dire pointant toujours au-dessus d'un même point de la Terre)
2) Calculer la vitesse d'évasion d'un astre sur le Terre

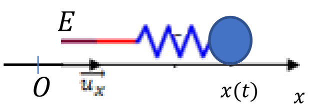
Données : $G \approx 6 \times 10^{-11} SI, m_0 \approx 6 \times 10^{24} kg R = 6400 km$

1) On trouve le rayon de l'orbite géostationnaire à l'aide de ma 3e loi de Kepler soit 40000km
2) La conservation de l'énergie mécanique donne : $E_{initiale} = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{Gmm_0}{R} = E_{finale}$

D'où : $v_l = \sqrt{\frac{2Gm_0}{R}}$.Dans le cas de la Terre $v_l \approx 10 km/s$.

Exercice 4 : Résonance

On accroche une masse ponctuelle m à un ressort horizontal de raideur k, de longueur à vide l_0. La masse ponctuelle m est soumise à une force de frottement fluide $-f\vec{v}$ (où f est un coefficient constant et $\vec{v}$ la vitesse de la masse par rapport au centre O-référentiel galiléen) et son poids est contrarié par la réaction normale du support. La masse m est animée d'un mouvement suivant l'axe Ox car l'autre extrémité E du ressort est animée d'un mouvement sinusoïdal du type $x_E(t) = X_E \cos(\omega t)$ autour du point O.



1) Donner l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la variable $X(t) = x(t) - l_0$.
2) En utilisant la notation complexe, mettre l'expression de la fonction de transfert $\frac{X}{x_E}$ sous la forme :
$$\frac{X}{x_E} = \frac{1}{1 + 2Mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$
On donnera l'expression de M et de ω_0
3) Montrer qu'il existe une possible résonance en élongation pour une pulsation $\omega = \omega_r$ que l'on exprimera.
4) On suppose que la vitesse du point M peut s'écrire sous la forme : $v(t) = V\cos(\omega t + \varphi_v)$. Donner l'expression de V et $V\cos(\varphi_V)$ en fonction de $M, u = \frac{\omega}{\omega_0}, \omega_0$ et X_E.
5) Pour quelle valeur de pulsation avons-nous résonance en vitesse pour le point M ?
6) Calculer la valeur de la puissance moyenne $\langle p_F \rangle$ fournie par la force $F(t) = kx_E(t)$ au point M en fonction de $M, u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et F_m. Pour quelle valeur de pulsation, cette puissance est-elle maximale ?

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{X} = -kX - f\dot{X} + kx_E$$

Soit : $\ddot{X} + 2M\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 x_E$

Avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $M = \frac{f}{2\sqrt{km}}$

Et en utilisant la notation complexe ; on obtient alors : $\frac{X}{x_E} = \frac{1}{1+2Mj\frac{\omega}{\omega_0}+\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

$$\frac{X}{x_E} = \frac{-1}{(1-u^2) + j\frac{u}{Q}}$$

$$\text{Soit : } \frac{X}{x_E} = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

L'analyse du dénominateur $g(u) = (1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2$ donne :

$$g'(u) = -4u(1-u^2) + \frac{2u}{Q^2} = u\left(\frac{2}{Q^2} - 4(1-u^2)\right)$$

On trouve donc une pente nulle en $u_1 = 0$ et $u_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Sachant que :

$$\underline{v} = j\omega\underline{X}$$

Alors :

$$Vexp(j\varphi_v) = \frac{X_e ju\omega_0}{(1-u^2 + 2Mju)} = \frac{X_e j\omega_0}{\left(\frac{1}{u} - u + 2Mj\right)}$$

On trouve alors :

$$V = \frac{X_e\omega_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{u}-u\right)^2 + (2M)^2}} \text{ et } Vcos\varphi_v = \frac{2MX_e\omega_0}{\left(\frac{1}{u}-u\right)^2 + (2M)^2}$$

$$\langle p_F \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)v(t)dt = \frac{kX_eV}{2}cos\varphi_v = \frac{kM{X_e}^2\omega_0}{\left(\frac{1}{u}-u\right)^2 + (2M)^2}$$

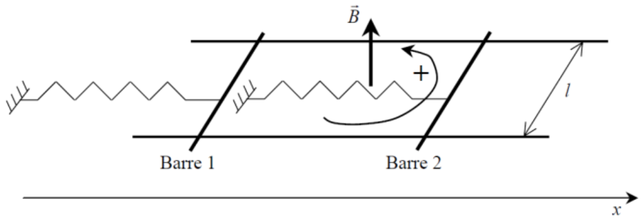
On retrouve un transfert maximal d'énergie à la résonance en vitesse ce qui constitue une autre définition de la résonance en vitesse.

Induction et mécanique

Exercice 5 : Rail de Laplace (*)

On considère deux barres de même masse m se translatant sans frottement suivant l'axe x et baignant dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et stationnaire. L'association des deux barres et du support constitue un circuit fermé de résistance R (on néglige l'auto-induction). Les deux ressorts identiques sont de raideur k et les coordonnées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ mesurent les positions respectives des barres 1 et 2 par rapport à leur situation de repos. Initialement, on impose $x_2(0) = a$ et $x_1(0) = 0$ et aucune vitesse initiale.

Déterminer, l'expression de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en régime établi.



L'équation mécanique de 1 est :

$$m\frac{dv_1}{dt} = -kx_1 - ilB$$

L'équation mécanique de 2 est :

$$m\frac{dv_2}{dt} = -kx_2 + ilB$$

L'équation électrique est :

$$e = -lB(v_2 - v_1) = Ri$$

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -\frac{k}{m}x_1 + \frac{(lB)^2}{Rm}(v_2 - v_1) \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{k}{m}x_2 - \frac{(lB)^2}{Rm}(v_2 - v_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{(lB)^2}{Rm}(v_2 - v_1) + \omega_0^2 x_1 = 0 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{(lB)^2}{Rm}(v_2 - v_1) + \omega_0^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Soit, en posant $X = x_1 + x_2$ et $Y = x_2 - x_1$

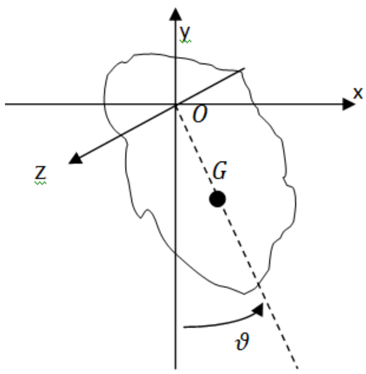
$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} + \dfrac{2(lB)^2}{Rm} Y + \omega_0^2 Y = 0 \end{cases}$$

En régime établi $Y = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = \frac{a}{2}\cos(\omega_0 t)$

Mécanique du solide

Exercice 6 : Le pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'un solide de masse m possédant un point fixe O et libre en rotation dans une direction donnée, ici $\overrightarrow{u_z}$. On considère que la liaison pivot entre l'axe de rotation et le solide est parfaite (moments et puissance des forces de liaison seront négligés). On appelle J_{zz} le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz. On repère par l'angle ϑ la position du centre masse G par rapport à la verticale. On pose $L = OG$



1) Rappeler le théorème du moment cinétique dans R (référentiel du laboratoire Galiléen dans lequel l'axe de rotation est fixe). Ecrire ensuite ce théorème sous sa version scalaire en projetant suivant $\overrightarrow{u_z}$ (vecteur unitaire de l'axe Oz fixe dans R) en faisant intervenir J_{zz}.

Le théorème du moment cinétique ne fait intervenir que le moment des forces extérieures. Dans un référentiel R et rapport à un point O appartenant à l'axe de rotation, on a :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}\right)_{/R} = \overrightarrow{M_{O_{fext}}}$$

Une projection suivant l'axe de rotation donne alors :

$$J_z\ddot{\vartheta} = \overrightarrow{M_{O_{fext}}}\overrightarrow{u_z}$$

2) Donner l'expression du moment associé au poids en fonction de l'angle θ.

On peut remarquer que le moment total associé au poids du solide est donné par :

$$\overrightarrow{M_{O_{poids}}} = \iiint \overrightarrow{OM} \wedge dm\vec{g} = \left(\iiint dm\overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{g} = m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{g}$$

Dans une base cylindrique, on a :

$$\overrightarrow{M_{O'_{poids}}} = -mgL\sin\vartheta\overrightarrow{u_z}$$

3) Donner ensuite l'équation du mouvement à partir des résultats précédents.

On trouve alors :

$$\ddot{\vartheta} + \frac{mgL}{J_z}\sin\vartheta = 0$$

4) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de la puissance mécanique.

L'énergie cinétique est ici uniquement sous forme d'énergie cinétique de rotation.

On a alors :$E_c = \frac{J\dot{\vartheta}^2}{2}$, et l'énergie potentielle est liée à la force de pesanteur $\iiint dm\vec{g}$. Soit un travail élémentaire donné par : $\delta W = \iiint dm\vec{g}\,d\vec{l} = \iiint dm\vec{g}\,d\overrightarrow{OM} = m\int \vec{g}d\overrightarrow{OG} = -mgdy_G$

$E_p = mgy_G + Cte$. En prenant une origine des potentielle à l'équilibre pour ϑ=0, on trouve alors : $E_p = mgL(1 - \cos\vartheta)$

Soit une énergie totale donnée par :

$$E_m = mgL(1 - \cos\vartheta) + \frac{J\dot{\vartheta}^2}{2}$$

On a ici conservation de l'énergie mécanique totale et on obtient alors l'équation du mouvement en dérivant par rapport au temps :

$$\ddot{\vartheta} + \frac{mgL}{J_z}\sin\vartheta = 0$$

5) Donner l'expression de la période des oscillations dans l'approximation harmonique.

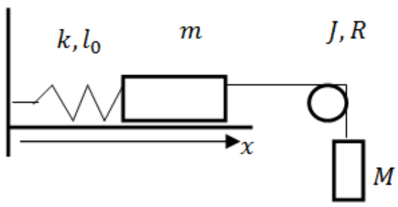
L'approximation harmonique revient à linéariser l'équation différentielle (ou l'énergie potentielle) :$\ddot{\vartheta} + \frac{mL}{J_z}\vartheta = 0$

Et la période des oscillations est alors donnée par :

$$T_0 = \frac{2\pi\sqrt{J_z}}{\sqrt{mgL}}$$

Exercice 7 : question ouverte-Translation et rotation d'un solide

Le fil est inextensible et de masse négligeable, le cube ne frotte pas sur le sol, le fil ne glisse pas sur la poulie. Trouver l'expression de la période des oscillations.



$T_1 = T_2$ et $T_3 = T_4$

Avec une analyse dynamique de la masse m

$$-k(l - l_0) + T_1 = m\frac{dv}{dt}$$

$$-Mg + T_4 = -M\frac{dv}{dt}$$

Avec une analyse dynamique de la poulie :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{J}{R}\frac{dv}{dt} = R(T_3 - T_2)$$

$$-k(l-l_0)+T_2=-k(l-l_0)+T_3-\frac{J}{R^2}\frac{dv}{dt}$$
$$=-k(l-l_0)+Mg-M\frac{dv}{dt}-\frac{J}{R^2}\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dt}$$

Avec $x=l-l_0$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kR^2}{((m+M)R^2+J)}x=\frac{MgR^2}{((m+M)R^2+J)}$$

On trouve alors la période des oscillations :

$$T=\frac{2\pi((m+M)R^2+J)}{kR^2}$$

Avec une méthode énergétique, si on étudie l'ensemble :

$$E=\frac{J\omega^2}{2}+\frac{(m+M)\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}-Mgz$$

Cette intégrale 1e du mouvement donne alors : $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\frac{\omega_0^2Mg}{k}$

Exercice 9 : Volant d'inertie

Un volant tourne autour d'un axe horizontal auquel son moment d'inertie est J ; son barycentre est sur l'axe de rotation. On schématise les frottements par un moment dont la valeur absolue M_0 est constante.

1) La vitesse angulaire initiale du volant est ω_0. Le volant s'arrête après N tours, exprimer M_0.
2) Comment peut-on vérifier expérimentalement que M_0 est constant ?

On utilise le TMC scalarisé :

$$J\frac{d\omega}{dt}=-M_0$$

$$\omega(t)=\omega_0-\frac{M_0}{J}t$$

Le moteur s'arrête à $t_0=\frac{\omega_0 J}{M_0}$

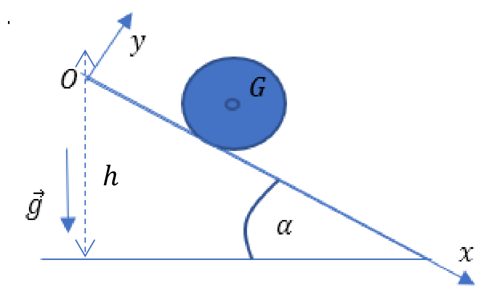
$$\theta(t)=\omega_0 t-\frac{M_0}{2J}t^2$$

$$N=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=\frac{\omega_0^2}{4\pi M_0}J$$

On peut vérifier ce modèle en appréciant la décroissant linéaire de la vitesse angulaire

Exercice 10 : Moment d'inertie

Un cylindre évidé et un cylindre plein de même rayon sont en mouvement de chute, sans vitesse initiale, sur un plan incliné de puis une hauteur h. On suppose qu'il n'y a pas de glissement et la conservation de l'énergie mécanique.



Quel cylindre aura la vitesse la plus grande à la fin de la pente ?

On applique la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{Jv^2}{2R^2}+\frac{1}{2}mv^2=mgh$$

$$v_F=\sqrt{\frac{2mgH}{\frac{J}{R^2}+m}}$$

Or $J_{plein}=\frac{mR^2}{2}$ et $J_{vide}=mR^2$

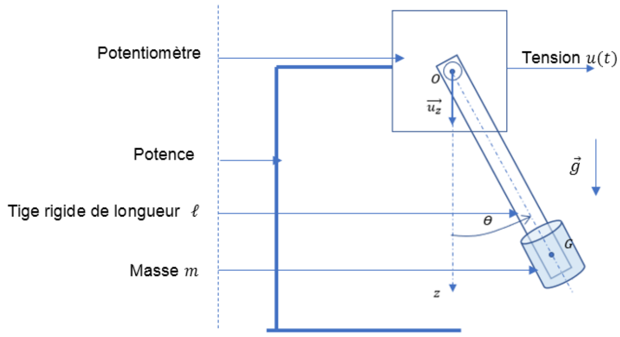
Donc le plus rapide est le plein :

$$v_{F,vide}=\sqrt{gh}$$

$$v_{F,plein}=\sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

Exercice 11 : Pendule pesant et anharmonicité

On considère la pendule pesant suivant :

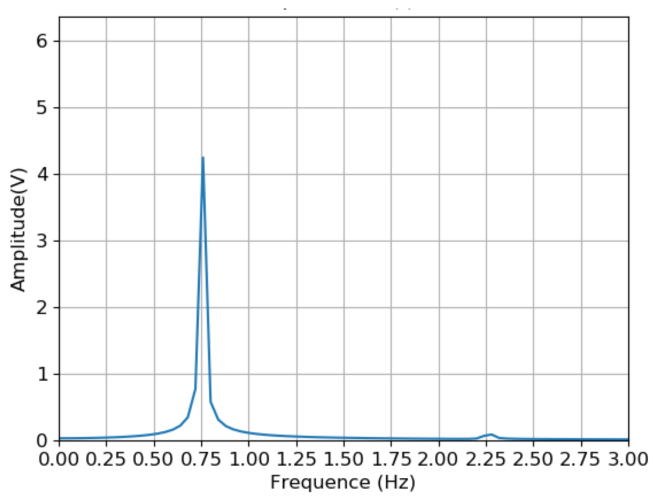


On note J le moment d'inertie de ce pendule par rapport à son axe de rotation. On suppose la liaison pivot parfaite. On note $l=OG$, g l'intensité du champ de pesanteur terrestre et m la masse du pendule. On note $\theta(t)$ la position angulaire du pendule par rapport à la verticale. L'oscillation du pendule génère une tension $u(t)$ proportionnelle à $\theta(t)$

1) Obtenir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$sous la forme :

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2 sin\theta=0$$

On lance le pendule et on obtient le spectre ci-dessous



2) L'oscillation est-elle harmonique ? Justifier.

On va résoudre numériquement cette équation en utilisant un schéma d'Euler implicite avec $\vec{y}=\begin{pmatrix}\theta(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{pmatrix}$ tel que $\frac{d\vec{y}}{dt}=\vec{f}(\vec{y},t)$. Chaque échantillon est associé à un triplet $(t_i = iT_e, \theta_i, \dot{\theta}_i)$ avec T_e la période d'échantillonnage

3) Montrer que $\begin{pmatrix} \theta_{i+1} = \theta_i + T_e\dot{\theta}_\iota \\ \dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i - T_e\omega_0^2\sin(\theta_{i+1}) \end{pmatrix}$
4) Ecrire un algorithme sur python rendant compte du schéma ci-dessus et permettant de résoudre cette équation puis tracer la fonction $\theta(t)$ obtenue sur quelques périodes. On prendra $\omega_0 = 2\pi\, rad/s$.

Avec le TMC : $J\ddot{\theta} = -mglsin\theta$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_{i+1} - \theta_i)/T_e \\ -\omega_0^2\sin\theta_{i+1} \end{pmatrix}.$$

D'où : $\begin{pmatrix} \theta_{i+1} = \theta_i + T_e\dot{\theta}_\iota \\ \dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i - T_e\omega_0^2\sin(\theta_{i+1}) \end{pmatrix}$

On a :

```
 import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.fftpack import fft, fftfreq

w0=2*np.pi
Te=10**-3
duree=10*2*np.pi/w0
N=int(duree/Te)
t=np.linspace(0,duree,N)
y=np.zeros((2,N))
y[0,0]=60*np.pi/180
for i in range (N-1):
   y[0,i+1]=y[0,i]+Te*y[1,i]
   y[1,i+1]=y[1,i]-Te*w0**2*np.sin(y[0,i+1])
plt.plot(t,y[0]*180/np.pi)
plt.xlabel("temps(s)")
plt.ylabel("angle(°)")
plt.title("Euler implicite")
plt.grid()
plt.show()
```