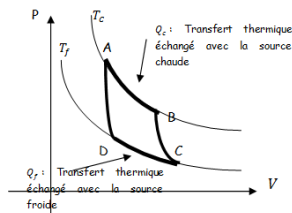


Exercice 1 : Cycle moteur de Carnot

Un système de  $n$  moles de gaz parfait décrit le cycle ABCD, dit cycle ditherme de Carnot, composé par la suite de transformations réversibles. Le cycle est supposé moteur et au contact de deux thermostats.

- 1) Tracer l'allure du cycle dans un diagramme de Clapeyron.
- 2) Appliquer le 1<sup>e</sup> et le 2<sup>nd</sup> principe et en déduire le rendement de ce moteur. On appellera  $T_f$  et  $T_c$  la température des deux thermostats.

Au contact avec les thermostats, une transformation isotherme mécaniquement réversible assurera la réversibilité. Le passage entre les deux isothermes ne peut se faire de manière réversible que par une transformation adiabatique et mécaniquement réversible : on obtient le cycle de Carnot.



En utilisant les deux principes de la thermodynamique sur un cycle (ou un nombre entier de cycles) :  $W + Q_c + Q_f = 0$  soit  $r = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$

Et, d'après l'inégalité de Clausius :  $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0$  soit :  $r \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$

Exercice 2 : Réfrigérateur de Carnot

Soit un réfrigérateur cyclique, réversible et ditherme. Exprimer son efficacité en fonction de la température de la source chaude  $T_c$  et de la source froide  $T_f$  supposées constantes.

On définit l'efficacité du réfrigérateur par :  $e = \frac{Q_f}{W}$

En utilisant les deux principes de la thermodynamique pour un cycle (ou un nombre entier de cycles) :  $W + Q_c + Q_f = 0$  soit  $e = \frac{-Q_f}{Q_f + Q_c}$

En considérant un cycle réversible :  $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$  soit :  $e = \frac{T_f}{T_c - T_f}$

Exercice 3 : PAC de Carnot

Soit une pompe à chaleur cyclique, réversible et ditherme. Exprimer son efficacité (en mode chauffage) en fonction de la température de la source chaude  $T_c$  et de la source froide  $T_f$  supposées constantes.

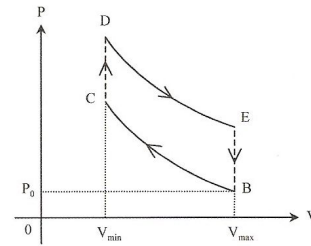
On définit l'efficacité du réfrigérateur par :  $e = -\frac{Q_c}{W}$

En utilisant les deux principes de la thermodynamique pour un cycle (ou un nombre entier de cycles) :  $W + Q_c + Q_f = 0$  soit  $e = \frac{Q_c}{Q_f + Q_c}$

En considérant un cycle réversible :  $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$  soit :  $e = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

Exercice 4 : Moteur essence non réversible

L'agent thermique est un mélange air-essence subit le cycle ci-dessous



Les grandeurs physiques seront affectées d'un indice correspondant à leur valeur au point du cycle considéré (B, C, D ou E). On considère la transformation de  $n$  moles de gaz parfait dont la capacité calorifique à volume constant est notée  $C_V$ . Les compressions et détentes sont supposées adiabatiques et mécaniquement réversibles.

- 1) Donner l'expression du rendement  $r$  de ce moteur en fonction des températures  $T_B, T_C, T_D$  et  $T_E$ .
- 2) Montrer ensuite que ce rendement est indépendant de la température mais juste fonction de  $a = \frac{V_{max}}{V_{min}}$ . En déduire alors comment augmenter le travail que pourra délivrer la machine. Faire un calcul de rendement en prenant  $\gamma = \frac{3}{2}$  et  $a = 9$

Donc :  $T_B = T_C \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1}$ ,  $Q_{CD} = C_V(T_D - T_C)$ ,  $T_E = T_D \left(\frac{V_D}{V_E}\right)^{\gamma-1}$  et  $Q_{EB} = C_V(T_B - T_E)$

Le rendement de ce moteur est donné par :

$$r = -\frac{W}{Q_{CD}} = \frac{Q_{CD} + Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{(T_B - T_E)}{(T_D - T_C)}$$

En utilisant les résultats précédents :

$$r = 1 + \frac{\left(T_C \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} - T_D \left(\frac{V_D}{V_E}\right)^{\gamma-1}\right)}{(T_D - T_C)} = 1 - \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 1 - a^{1-\gamma}$$

AN :  $r = \frac{2}{3}$

Exercice 5 : Chaudière + pompe à chaleur

On souhaite maintenir la température d'une serre à la valeur constante  $T_1 = 293K$ . L'air extérieur est à la température  $T_2 = 283K$ . Dans ce but, on utilise une chaudière à la température  $T_3 = 600K$  capable de fournir un transfert thermique  $Q_3$ .

A) Etude de la chaudière :

- 1) La chaudière utilise du méthane dont la combustion avec l'oxygène conduit à du dioxyde de carbone et de l'eau (l'ensemble étant en phase vapeur). Ecrire la réaction en affectant un coefficient stœchiométrique unitaire au méthane  $CH_4$
- 2) En utilisant les données ci-dessous, calculer l'enthalpie standard de cette réaction à 298 K. On supposera les capacités thermiques indépendantes de la température.

	$CH_4(g)$	$O_2(g)$	$CO_2(g)$	$H_2O(g)$
$\Delta_f H^0 (kJ.mol^{-1})$	-75	-	-400	-250

3) Cette réaction est exothermique ou endothermique ?

On décide de ne pas utiliser directement la chaudière pour chauffer la serre mais d'adopter le dispositif suivant : la chaudière fournit le transfert thermique  $Q_3$  à l'agent thermique d'un moteur cyclique réversible fonctionnant entre la chaudière à la température  $T_3$  et l'air extérieur à  $T_2$ . Le travail  $-W$  récupéré du moteur est utilisé pour actionner une pompe à chaleur réversible fonctionnant entre l'extérieur à  $T_2$  et l'intérieur de la serre à  $T_1$ . On note  $Q_2$  le transfert thermique algébrique de l'extérieur vers l'agent thermique de la pompe. On note  $Q_1$  le transfert thermique algébrique de l'intérieur de la serre vers l'agent thermique de la pompe.

**B) Etude du dispositif :**

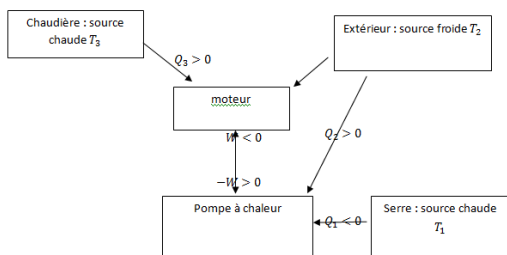
- 1) Reporter sur un schéma de principe les différents échanges énergétiques algébriques mis en jeu lors du chauffage
- 2) Exprimer le transfert thermique  $Q_3$  mise en jeu par le moteur en fonction de  $W, T_2$  et  $T_3$ .
- 3) Exprimer le transfert thermique algébrique  $Q_1$  de l'intérieur de la serre vers l'agent thermique de la pompe en fonction de  $W, T_1$  et  $T_2$
- 4) Définir puis exprimer l'efficacité  $e$  de l'ensemble du dispositif en fonction  $T_1, T_2$  et  $T_3$

**A/ Etude de la chaudière :**

1. La réaction à considérer est donc :  $CH_4 + 2O_2 = 2H_2O + CO_2$
2. L'enthalpie de réaction à 298K est  $\Delta_r H^0(298K) = -802,6 kJ/mol$
3. Cette réaction est exothermique.

**B/ Etude du dispositif :**

1.



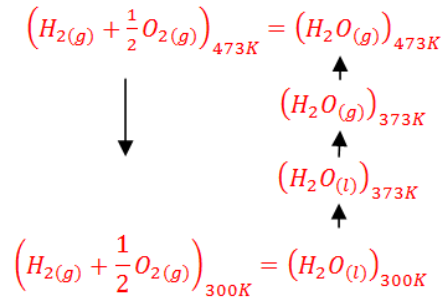
2. Le fonctionnement réversible du système permet d'écrire :  $\frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$  soit  $Q_2 = -\frac{T_2}{T_3} Q_3$ . Avec le 1<sup>er</sup> principe :  $W = -Q_3 - Q_2 = Q_3 (\frac{T_2}{T_3} - 1)$  donc  $Q_3 = \frac{W}{(\frac{T_2}{T_3} - 1)}$

3. De même :  $\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0$  soit  $Q_2 = -\frac{T_2}{T_1} Q_1$  Avec le 1<sup>er</sup> principe :  $-W = -Q_1 - Q_2 = -Q_1 + \frac{T_2}{T_1} Q_1 = Q_1 (\frac{T_2}{T_1} - 1)$  soit :  $Q_1 = \frac{-W}{\frac{T_2}{T_1} - 1}$

4. L'efficacité est donnée par :  $e = \frac{-Q_1}{Q_3} = \frac{\frac{-W}{\frac{T_2}{T_1} - 1}}{\frac{W}{\frac{T_2}{T_3} - 1}} = \frac{T_1}{T_2} \frac{T_2 - T_3}{T_3} = 15,5$

Exercice 6 : Problème de chimie

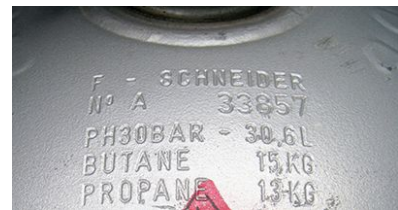
Calculer l'enthalpie standard de formation de l'eau vapeur à 473K.  
Données :  $C_{p,m}(O_2(g)) = C_{p,m}(H_2(g)) \approx C_{p,m}(H_2O(g)) \approx 30 J K^{-1} mol^{-1}$ ,  $C_{p,m}(H_2O(l)) = 75 J K^{-1} mol^{-1}$ ,  $\Delta_f H^0(H_2O(l), 300K) = -286 kJ/mol$ ;  $\Delta_{vap} H^0(373K) = 40 kJ/mol$



$$\Delta_f H_{H_2O(g)}^0(473K) = \frac{3}{2} C_{p,m,gaz}(300 - 473) + \Delta_f H_{H_2O(l)}^0(300K) + C_{p,m,liq}(373 - 300) + \Delta_{vap} H^0(373K) + C_{p,m,gaz}(473 - 373) \approx -246 kJ/mol$$

Exercice 7 : Problème de chimie

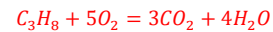
Estimer le nombre de casseroles contenant 1L d'eau liquide à 0°C que l'on peut porter à ébullition avec une bouteille contenant du propane.



$$\Delta_f H^0(\text{propane}_{(g)}) = -100 kJ.mol^{-1}, \quad \Delta_f H^0(H_2O_{(g)}) = -250 kJ.mol^{-1}, \quad \Delta_f H^0(CO_2_{(g)}) = -400 kJ.mol^{-1} \text{ et } c_{eau(l)} \approx 4000 J/K/kg$$

Il suffit de faire le rapport entre la chaleur disponible dans la bouteille et la chaleur pour chauffer 1 L d'eau de 0°C à 100°C

On a une réserve d'énergie liée à la réaction :



Soit une enthalpie de réaction de  $-2100 kJ.mol^{-1}$

$$\text{Donc } N = \frac{2100 \times 10^3 \times 13}{44 \times 10^{-3} \times 4000 \times 100} \approx 2000$$

Exercice 8 : Machine frigorifique-Diagramme T(s) et P(h)

Soit une machine cyclique, ditherme qui impose au fluide frigorifique (ici du R134A) le cycle suivant :

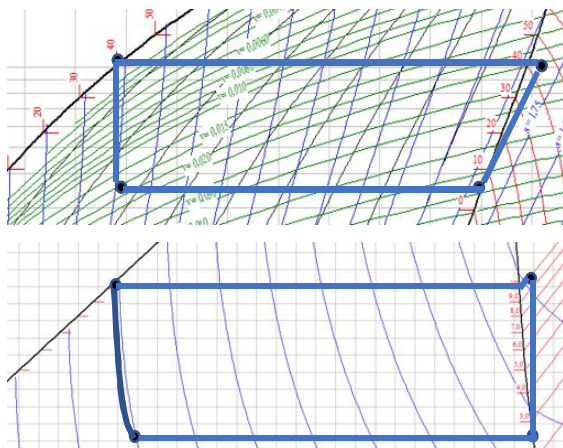
- En A, le fluide est un gaz saturé et entre dans le compresseur :  $A\{T_A, P_A\}$
- La transformation  $A \rightarrow B$  est une compression supposée adiabatique et mécaniquement réversible, le fluide reste alors toujours à l'état gazeux (surchauffé) :  $B\{T_B, P_B\}$
- La transformation  $B \rightarrow C$  est un refroidissement isobare jusqu'à la première goutte de liquide (il entre alors dans le condenseur) :  $C\{T_C, P_B\}$
- La transformation  $C \rightarrow D$  est une liquéfaction à la pression  $P_B$  aboutissant à un liquide saturé :  $D\{T_C, P_B\}$
- Le liquide subit une détente isenthalpique (détente de Joule-Thomson) faisant apparaître un mélange diphasé en  $E\{T_E, P_A\}$
- Vaporisation isobare jusqu'à un gaz saturé en  $A\{T_E, P_A\}$  dans l'évaporateur.

1) Tracer le cycle précédent sur le diagramme  $p(h)$  fourni sachant que D et E sont confondus et avec les valeurs suivantes :

$P_A(\text{bar}) = 1,5 + 1$	$P_B(\text{bar}) = 9 + 1$
-----------------------------	---------------------------

- 2) En déduire, par lecture graphique, les valeurs des grandeurs suivantes :
  - Le travail massique  $w$  du compresseur
  - Le transfert thermique  $q_f$  mis en jeu au niveau de l'évaporateur
  - Le transfert thermique  $q_c$  mis en jeu au niveau du condenseur
- 3) Vérifier que vos mesures conduisent à  $q_f + q_c + w \approx 0$ . Pourquoi ?
- 4) Exprimer puis calculer le coefficient de performance de cette machine réfrigérante.
- 5) Dessiner le cycle précédent dans un diagramme  $T(s)$ .
- 6) Montrer qu'il est possible de retrouver les valeurs de  $q_f$  et  $q_c$  sur ce diagramme  $T(s)$
- 7) Evaluer, à l'aide du diagramme  $T(s)$ , la fraction massique en liquide au point E. En déduire la chaleur latente de vaporisation du fluide pour cette basse pression.

On obtient les graphes suivants :



On trouve dans les deux cas :

- $w = 30 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $q_c = -170 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $q_f = 140 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

On retrouve le premier principe appliqué au cycle complet car  $w + q_c + q_f = 0$

On trouve alors :  $COP \approx 5$

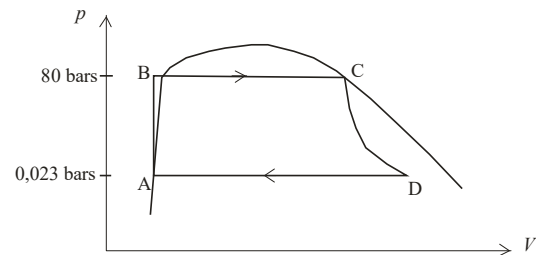
Sur le diagramme entropique on a avec la règle des moments :

$$x_l \approx 0,7$$

$$\text{Et donc } l_v = -\frac{q_f}{x_l} = 190 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

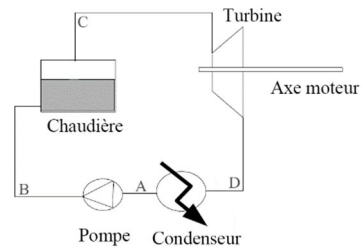
Exercice 9 : Cycle de Rankine-diagramme P(v)

On considère une machine motrice ditherme suivant le cycle de Rankine que l'on va décrire dans un diagramme de Clapeyron.



Cette machine est constituée :

- d'une chaudière (transformation BC)
- d'une turbine entraînant un axe moteur (transformation CD)
- d'un condenseur (transformation DA)
- d'une pompe (transformation AB)



- Etat (A) : L'eau est liquide saturant :  $p_1 = 0,023 \text{ bar}$  et  $T_1 = 293 \text{ K}$
- Transformation (AB) : l'eau est amenée grâce à une pompe vers la chaudière sous une compression  $p_2 = 80 \text{ bar}$ . La transformation (AB) est adiabatique et réversible.
- Transformation (BC) : l'eau est chauffée puis vaporisée totalement de manière isobare dans la chaudière à la pression  $p_2 = 80 \text{ bar}$ .
- Transformation (CD) : La vapeur d'eau saturée se détend de manière adiabatique et réversible dans une turbine jusqu'à la pression  $p_1 = 0,023 \text{ bar}$ . La fraction massique de vapeur en D est alors  $x$ .
- Transformation (DA) : La vapeur restante se condense à la pression  $p_1 = 0,023 \text{ bar}$ .

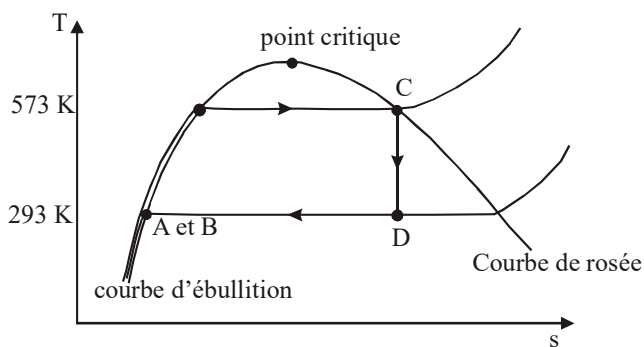
On donne les valeurs suivantes :

Température en K	Pression de vapeur saturante en bar	enthalpie massique en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$		Entropie massique en $\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$	
		$h_l$	$h_v$	$s_l$	$s_v$
293	0,023 ( $p_1$ )	85	2540	0,3	8,7
573	80 ( $p_2$ )	1290	2890	3,2	6,0

L'écoulement est stationnaire (permanent) et on néglige les variations d'énergie potentielle et cinétique

- 1) Démontrer que (CD) est une isentropique.
- 2) Calculer le titre en vapeur  $x$  en (D).
- 3) Calculer le travail indiqué  $w$  massique de la turbine.
- 4) Pourquoi peut-on considérer que  $h_B \approx h_A$  ?
- 5) Calculer le transfert thermique massique  $q_{BC}$
- 6) Calculer le rendement  $r$  de la machine.
- 7) Calculer le rendement maximal qu'on aurait pu avoir avec les mêmes températures.

Il s'agit d'un cycle moteur dans lequel la dépense énergétique est liée au chauffage (BC) que l'on peut aussi apprécier dans une diagramme TS. En revanche, dans ce type de diagramme la phase de compression n'est pas trop appréciable



1/L'hypothèse adiabatique implique que  $S_e = 0$ , l'hypothèse réversible implique  $S_c = 0$  donc d'après le second principe  $\Delta_{CD}S = 0$  On en déduit que  $S_D = S_C = 6,0 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

2/  $s_l = 0,3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$  et  $s_v = 8,7 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$  On a

$$x = \frac{S_D - s_l}{s_v - s_l} = 67,9\%$$

Inconvénient : la présence de gouttelettes d'eau liquide va endommager la turbine à grande vitesse (chocs). La solution est un surchauffeur de vapeur après la chaudière (cycle de Hirn).

3/  $q_{CD} = 0$  ; premier principe écoulements stationnaires

$$w_{iCD} + q_{CD} = h_D - h_C$$

or  $h_D = x.h_v + (1-x).h_l = 1751 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  car

$$h_l = 85 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} \text{ et } h_v = 2540 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

$$\text{donc : } w_{iCD} = -1139 \text{ kJ/kg}$$

4/La pompe comprime un liquide peu compressible ce qui se traduit par un travail massique faible pour une compression adiabatique alors quasi isenthalpique. Justifions cela en système ouvert

adiabatique  $\delta q = 0$  et réversible  $ds = \frac{\delta q}{T}$  donc  $ds = 0$ .

or  $dh = T ds + v dp$  soit dans la pompe  $dh = v dp$

avec  $v \approx 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$  constant donc  $\Delta h \approx v \Delta p \approx 8 \text{ kJ/kg}$  ce qui est faible face aux autres variations enthalpiques enthalpies donc  $h_B \approx h_A$

Le faible travail nécessaire ( $w_i = \Delta h \approx 0$ ) fait qu'on utilise

une pompe pour élever la pression moins coûteuse qu'un compresseur. Il est important que le condenseur est bien liquéfié l'eau car un mélange liq-vap endommagerait la pompe (cavitation à bulles explosives).

5/pas de partie mobile donc  $w_i = 0$  donc

$$q_{BC} + w_{iBC} = h_C - h_B = 2890 - 85 \Rightarrow$$

$$q_{BC} = 2805 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

$$\eta = \frac{-w_i}{q_{BC}} = 40,7\%$$

D'après le théorème de Carnot, le rendement maximal ne dépend que de la différence de température des sources et il vaut:  $e_{\text{max}} =$

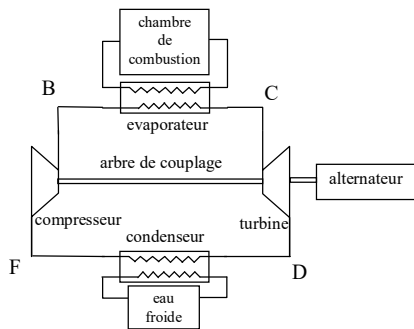
$$1 - \frac{T_1}{T_2} = 49\% \text{ (démonstration à refaire)}$$

Exercice 10 : cycle de Hirn

Une centrale thermique permet la production d'électricité à partir de la combustion de fuel ou de charbon. L'eau subit différentes transformations afin de produire de l'énergie mécanique  $P = 250MW$  transformée ensuite en énergie électrique.

Dans la chambre de combustion, l'eau atteint la température  $T_c = 500^\circ C$  constante; grâce au circuit secondaire de refroidissement, la température de l'eau chute à  $T_f = 65^\circ C$  constante.

- Déterminer, en faisant la démonstration, le rendement maximal de la centrale et en déduire la puissance minimale thermique  $P_{idéale}$  de la chambre de combustion. Effectuer les applications numériques.
- Dans le compresseur et dans la turbine, la compression et la détente sont adiabatiques et réversibles. Quelle propriété ont ces transformations? En effectuer la démonstration.
- Pourquoi, pour ce type de machine, vaut-il mieux comprimer un liquide?



- A l'entrée F du compresseur, l'eau est à l'état liquide saturé à  $P_1 = 0,2bar$  et  $T_f = 65^\circ C$
- FB : Elle subit une compression jusqu'à  $P_2 = 100bar$  tout en restant liquide.
- BC : Dans l'évaporateur, la température de l'eau augmente jusqu'à  $T_c = 500^\circ C$  ; en négligeant la viscosité la transformation est isobare  $P_2 = 100bar$ .
- CD : Dans la turbine, la pression de l'eau chute jusqu'à  $P_1 = 0,2bar$ . Le système est diphasé
- DF : Dans le condenseur, l'eau à  $T_f = 65^\circ C$  entre en contact avec un circuit de refroidissement secondaire. En négligeant la viscosité, la liquéfaction est isobare  $P_1 = 0,2bar$ .

Le diagramme thermodynamique  $T(^\circ C)-s(kJ.K^{-1}.kg^{-1})$  de l'eau est constitué de réseaux de courbes isenthalpiques (en  $kJ.kg^{-1}$ ) et isobares (en bar). Pour des raisons de lisibilité, les isobares n'ont pas été représentées sous la courbe de saturation. Dans ce type de diagramme, les points F et B sont très proches et on les confondra.

- Tracer le cycle sur le diagramme.
- Déterminer les valeurs des transferts thermiques massiques  $q_{BC}$  et  $q_{DF}$  en justifiant vos calculs.
- En déduire le rendement de la machine.
- Déterminer le débit d'eau  $D$  de la machine.
- Déterminer la fraction massique  $x$  en vapeur à l'état D.

1) Nous savons que le bilan sur un cycle donne  $r = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{P}{P_i}$  donc  $r = 56\%$  soit  $P_i = 444MW$

2) La compression est donc isentropique

3) L'apport de calories est principalement lié à l'échange thermique. La compression en s'appliquant sur un liquide (peu compressible) ne met pas en jeu une grande quantité d'énergie (qui est ici une perte). On a, en effet  $\delta w = -pdv \approx 0$ . Plus quantitativement, si l'on suppose la

Etat	F	C	D
$h$ (kJ/kg)	250	3400	2200

compression isentropique alors  $dh = vdP$  et  $\Delta h \approx v\Delta P \approx 10^{-3} \times 10^7 = 10kJ/kg$  ce qui est négligeable par rapport aux autres variations enthalpiques. On peut donc même écrire que  $w = w_{détente}$

4)  $q_{BC} = 3150kJ.kg^{-1}$  et  $q_{DF} = -1950kJ.kg^{-1}$

5)  $r = 1 + \frac{q_f}{q_c} = 38\%$

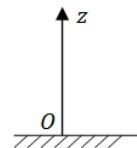
6)  $P = -Dw = D(q_c + q_f)$  d'où un débit de 208kg/s

7)  $s_D = xs_{vap} + (1-x)s_l$  donc  $x = \frac{s_D - s_{liq}}{s_{vap} - s_{liq}} \approx 81\%$

Mécanique des fluides

Exercice 11 :

On considère l'atmosphère terrestre comme un gaz parfait isotherme (de température  $T_0$  et de masse molaire ). Donner l'expression de la pression  $P(z)$  en référentiel terrestre galiléen (le champ de pesanteur est considéré uniforme et vertical). On utilisera le repérage ci-contre et une pression au niveau du sol donnée par  $P_0$ .



Avec la loi de la statique des fluides et un axe ascendant :  $\frac{dP(z)}{dz} = -\rho g$

Et la loi des gaz parfait donne alors :  $\rho = \frac{MP}{RT_0}$

Ainsi :  $\frac{dP(z)}{dz} + \frac{Mg}{RT_0}P = 0$  Soit  $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$ .

Exercice 12 : Débit volumique

On observe un écoulement axial de symétrie cylindrique dans une conduite cylindrique de rayon  $R$ . Calculer le débit volumique et la vitesse moyenne de l'écoulement (appelée aussi vitesse débitante) si :

- $v_z = v_0$  avec vitesse  $v_0$  constante
- $v_z = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$  avec  $v_0$  vitesse en  $r = 0$

Si le champ des vitesses est uniforme alors le débit est évident (et ne nécessite pas de calculer la surface !!!!) :  $D_v = v_0\pi R^2$

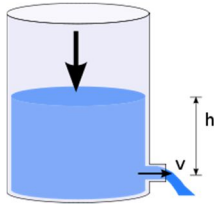
Avec le profil Poiseuille, on a :  $D_v = \iint_S v_0(1 - \frac{r^2}{R^2}) r dr d\theta$

$$D_v = 2\pi v_0 \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R = \frac{\pi v_0 R^2}{2}$$

Soit une vitesse moyenne donnée par  $\frac{v_0}{2}$

Exercice 13 : Vidange

On considère l'écoulement d'un liquide incompressible, parfait dans un réservoir percé. La situation est maintenue stationnaire par une alimentation continue en eau et l'eau évacuée se retrouve à la sortie du dispositif à la pression atmosphérique  $P_0$ . On note  $g$  l'intensité du champ de pesanteur terrestre



- 1) Exprimer la vitesse  $v$  d'éjection si la section  $s$  en sortie est bien plus faible que la section  $S$  du réservoir.

Pour aller plus loin(\*)

Le réservoir n'est plus alimenté et se vidange au cours du temps. Le liquide est encore considéré comme un fluide parfait et incompressible et  $S \gg s$  et la vitesse d'évacuation est alors  $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ .

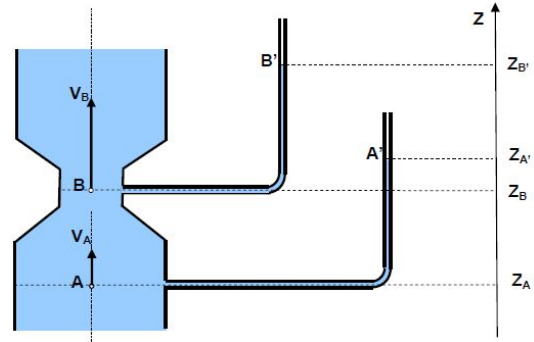
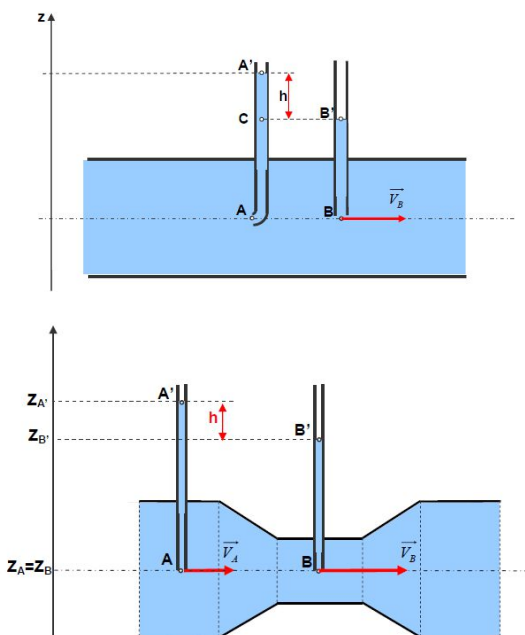
- 2) Déterminer alors la durée  $\tau$  de vidange si le réservoir est initialement rempli jusqu'à une hauteur  $h_0$ .

1)  $v = \sqrt{2gh}$

2)  $\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{s}{S}v(t) = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh(t)}$  et donc le temps de vidange est donné par  $\int_0^\tau dt = -\frac{s}{S} \int_{h_0}^0 \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{s\sqrt{2h_0}}{s\sqrt{g}}$

Exercice 14 : Débitmètre

Montrer que chaque système peut constituer un débitmètre. Les écoulements seront tous supposés parfaits, stationnaires et incompressibles et parfaitement axiaux.



1) On applique Bernoulli sur la ligne de courant axiale :  $\frac{P_A}{\rho} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2}$ . Verticalement, le champ des pressions évolue comme dans le cas statique :

$P_A - P_B = \rho hg$  Donc  $v_B = \sqrt{2gh}$

2) On applique Bernoulli sur la ligne de courant axiale :  $\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2}$ . Verticalement, le champ des pressions évolue comme dans le cas statique :  $P_A - P_B = \rho hg$  et la conservation du débit

volumique donne alors :  $v_A S_A = v_B S_B$  soit :  $v_B = \sqrt{\frac{2hg}{1 - (\frac{S_B}{S_A})^2}}$

3) On applique Bernoulli sur la ligne de courant axiale :

$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B$

$P_B - P_A = \rho g(z_B' - z_B - (z_A' - z_A))$  et la conservation du débit volumique donne alors :  $v_A S_A = v_B S_B$  soit :

$$v_B = \sqrt{\frac{2(z_B' - z_A')g}{1 - (\frac{S_B}{S_A})^2}}$$

Expérimentalement  $z_A' > z_B'$

Exercice 15 : problème ouvert

Estimer la puissance minimale d'une pompe permettant de puiser de l'eau au repos à 10 mètres sous terre avec un débit de 10L/s.

Si on suppose l'écoulement parfait, homogène, incompressible, stationnaire alors pour une variation de vitesse nulle, on a :  $P = \rho D_v gh = 1kW$

Exercice 16

On considère une pièce à la température  $T_i = 20^\circ\text{C}$ . La température extérieure est  $T_e = 5^\circ\text{C}$ .

- Simple vitrage

On étudie les transferts thermiques avec l'extérieur à travers une vitre en verre de conductivité thermique  $\lambda = 1\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , de largeur 50cm, de longueur 60cm et d'épaisseur 3mm. On suppose qu'il y a un flux sortant à travers les parois de la pièce et on se place en régime stationnaire. On néglige le flux conducto-convectif et les effets de bords (flux unidirectionnel et unidimensionnel).

- 1) Définir et calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire la puissance thermique perdue.

- Double vitrage

On remplace le simple vitrage par un double vitrage constitué de deux vitres (identiques à la précédente) renfermant une couche d'air de conductivité thermique  $\lambda = 0,01\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , d'épaisseur 30mm.

- 2) Calculer la puissance thermique perdue. Analyser.

Pour le simple vitrage :

Comme pour l'exercice précédent la résistance thermique est donnée par :  $R = \frac{l}{\lambda S}$  et l'on trouve alors :

$$R_{\text{verre}} = \frac{0,003}{1 \times 0,30} \approx \frac{3 \times 10^{-1}}{30} = 10^{-2} \text{K/W}$$

On trouve alors le flux thermique :

$$P = \frac{\Delta T}{R_{\text{verre}}} = 1,5 \text{kW}$$

Pour le double vitrage :

Les résistances sont en série et :

$$R_{\text{eq}} = 2R_{\text{verre}} + R_{\text{air}}$$

$$R_{\text{eq}} = 2 \times 10^{-2} + \frac{0,03}{0,01 \times 0,3} \approx 10 \text{K/W}$$

La résistance est principalement liée à la lame d'air (qui est dans le pratique un gaz d'argon à basse pression)

$$P = \frac{\Delta T}{R_{\text{eq}}} = 1,5 \text{W}$$

On note la très bonne efficacité du double vitrage.

A noter que nous sommes maintenant à du triple vitrage !

On considère un matériau conducteur compris entre deux cylindres coaxiaux, de rayon  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ , de conductivité  $\lambda$ . Les parois cylindriques de ce matériau sont maintenues constantes à la température  $T_1$  pour  $r = R_1$  et à la température  $T_2$  pour  $r = R_2$ . On se place en régime stationnaire, on néglige les effets de bords et le système présente un profil des températures à symétrie cylindrique.

- 1) Justifier pourquoi le vecteur densité de flux de conduction thermique est tel que  $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ .
- 2) Donner la résistance thermique  $R_{th}$  entre deux cylindres de hauteur  $H$  en fonction de  $\lambda, R_1, R_2$  et  $H$ .
- 3) Donner des exemples concrets où ce modèle de conduction est applicable.
- 4) Etudier le cas particulier où  $R_1$  et  $R_2$  sont très proches.

Les invariances de la température sont celles du vecteur densité de courant qui est radial :  $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ . En régime stationnaire le flux est conservatif et  $P = \text{Cte}$ :

$$P = j(r) \times 2\pi r H = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H$$

Donc :  $dT = \frac{-dr}{2\pi\lambda H r} P$  et  $\Delta T = \frac{1}{2\pi\lambda H} \ln \frac{R_2}{R_1} \times P$

Donc :  $R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda H} \ln \frac{R_2}{R_1}$

Cette résistance thermique est celle qui intervient :

- Dans les canalisations transitant des fluides sur de longue distance (en Island par exemple)
- Dans les canalisations de système domestique (tuyau d'eau chaude sanitaire partant de la chaudière par exemple)

Si les deux rayons sont proches alors :

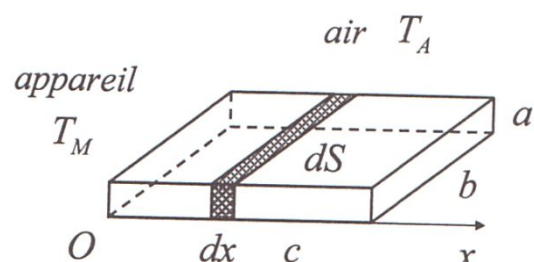
$$\ln \frac{R_1 + e}{R_1} = \ln \left( 1 + \frac{e}{R_1} \right) \approx \frac{e}{R_1}$$

Et :  $R_{th} = \frac{e}{2\pi\lambda R_1 H}$  et on retrouve une résistance analogue à celle d'une plaque d'épaisseur  $e$ .

Exercice 18 : Ailette de refroidissement

Pour éviter un échauffement trop important des appareils électriques, dû à l'effet Joule, on munit l'arrière de leur boîtier d'ailettes de refroidissement métalliques.

Dans notre cas, chaque ailette est parallélépipédique, d'épaisseur  $a = 1\text{mm}$ , de largeur  $b = 10\text{cm}$  et de longueur  $c = 10\text{cm}$ . Dans les calculs on admettra que  $a \ll b$ .



En fonctionnement stationnaire, le boîtier de l'appareil maintient une température  $T_M = 60^\circ C$ . L'air extérieur est à température constante et uniforme  $T_A = 20^\circ C$ , sauf au voisinage immédiat de l'ailette, entourée d'une couche limite d'air vérifiant la loi de Newton dont le coefficient de transfert conducto-convectif est  $h = 250 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ . Dans l'ailette, on admet une conduction thermique est monodimensionnel et unidirectionnel suivant  $Ox$ , la loi de Fourier s'applique et la conductivité est  $\lambda = 50 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ .

- 1) Ecrire le bilan en régime stationnaire des échanges thermiques d'une tranche de l'ailette de largeur  $dx$ . En déduire que la température  $T(x)$  est la solution de l'équation différentielle :  $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_A}{\delta^2}$ .
- 2) Interpréter la quantité  $\delta$  à l'aide d à l'aide d'une analyse dimensionnelle.
- 3) Justifier que  $T(c) \approx T_A$  après avoir calculé  $\delta$ .
- 4) Résoudre l'équation différentielle précédente et donner l'expression simplifiée de  $T(x)$  compte tenu de l'inégalité entre  $\delta$  et  $c$ .
- 5) Exprimer par deux méthodes et calculer numériquement la puissance thermique totale  $P$  évacuée par une ailette.
- 6) Combien faudrait-il fixer d'ailette sur le boîtier pour évacuer une puissance totale  $P_{tot} = 200W$  ?

En régime stationnaire, le flux rentrant dans  $dx \times b \times a$  et le flux sortant sont égaux :

$$-\lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)_x \times ab = 2h(T(x) - T_A)(b+a)dx - \lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} \times ab$$

D'où :

$$\lambda ab \frac{d^2T}{dx^2} dx - 2h(T(x) - T_A)(b+a)dx = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} (T(x) - T_A) = 0$$

Soit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{(T(x) - T_A)}{\delta^2} = 0$$

$$\delta^2 = \frac{\lambda a}{2h}$$

$$D'où \delta = \sqrt{\frac{50 \times 10^{-3}}{2 \times 250}} \approx 1cm \ll c$$

$$\text{Ainsi : } T(x) = T_A + A \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

Avec  $T(c) = T_A$ , on a  $B = 0$

$$T(x) = T_A + (T_M - T_A) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

Donc la puissance  $P$  évacuée, qui s'identifie à la puissance  $P'$  (par continuité du flux en  $x = 0$ ), est donnée par :

$$P = -\lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} ab = \frac{\lambda (T_M - T_A) ab}{\delta}$$

Ou encore par :

$$P = \int_0^c 2h b (T(x) - T_A) dx = \int_0^c 2h b (T_M - T_A) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) dx$$

$$P \approx 2hb(T_M - T_A)\delta$$

$$P = \frac{\lambda ab}{\delta} (T_M - T_A)$$

$$\text{Donc } P \approx \frac{50 \times 10^{-3} \times 10^{-1} \times 40}{10^{-2}} \approx 20W$$

Il faut donc 10 ailettes de ce type.

Exercice 19 : question ouverte (\*)

On considère un tube métallique cylindrique d'axe  $Oz$ , de longueur  $L$ , de rayon intérieur  $R_1$  et de rayon extérieur  $R_2$ , de conductivité thermique  $\lambda$ . A l'intérieur de ce tube est contenue de l'eau en écoulement dont la température est  $T(z)$ .



Conduite islandaise permettant le cheminement des eaux chaudes des geysers

L'air à l'extérieur de la structure est maintenu à température constante à  $T_0$ . Les échanges thermiques à l'interface eau/paroi intérieure (respectivement paroi extérieur/air) sont modélisés par la loi de Newton avec le coefficient d'échange  $h_1$  (respectivement  $h_2$ ). On supposera que les échanges thermiques se font uniquement suivant  $\vec{u}_r$  (vecteur unitaire radial). Tous les transferts thermiques sont supposés stationnaires. On donne :  $\lambda = 0,1W \cdot m^{-1}K^{-1}$ ,  $h_1 = 50W \cdot m^{-2}K^{-1}$ ,  $h_2 = 25W \cdot m^{-2}K^{-1}$ ,  $R_1 = 30cm$ ,  $R_2 = 40cm$  et  $T_0 = 20^\circ C$ ,

Déterminer la longueur  $L$  du tube limitant un refroidissement de 10% de l'eau. Le débit massique est  $D_m = 100kg/s$  et la capacité thermique massique de l'eau est  $c = 4000J/K/kg$ . On négligera les variations d'énergies potentielle et  $T(z = 0) = 90^\circ C$

Dans ce problème, nous avons trois résistances (linéiques) en série :

- Résistance eau-paroi liée à un échange conducto-convectif :  $\frac{1}{2\pi R_1 h_1}$
- Résistance de conduction thermique :  $\frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi \lambda}$
- Résistance paroi-air liée à un échange conducto-convectif :  $\frac{1}{2\pi R_2 h_2}$

Donc la résistance linéique totale est :

$$R_l \approx 0,48K/W$$

Donc le premier principe de la thermodynamique des systèmes en écoulement entre  $z$  et  $z + dz$  :



$$h(z + dz) - h(z) = \delta q < 0$$

$$D_m(h(z + dz) - h(z)) = dP < 0$$

$$D_m c(T(z + dz) - T(z)) = dz(T_0 - T(z))/R_t$$

$$\frac{dT}{dz} + \frac{T}{cR_t D_m} = \frac{T_0}{cR_t D_m}$$

Donc :  $\delta = cR_t D_m \approx 200 \text{ km}$

Donc :  $T(z) = (T(0) - T_0) \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) + T_0$

On veut :

$$\frac{T(L) - T(0)}{T(0)} = \frac{(T(0) - T_0) \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) + T_0 - T(0)}{T(0)} = -0,1$$

$$L = -\delta \ln\left(\frac{T(0) - 0,1T(0) - T_0}{T(0) - T_0}\right) = 142 \text{ km}$$