

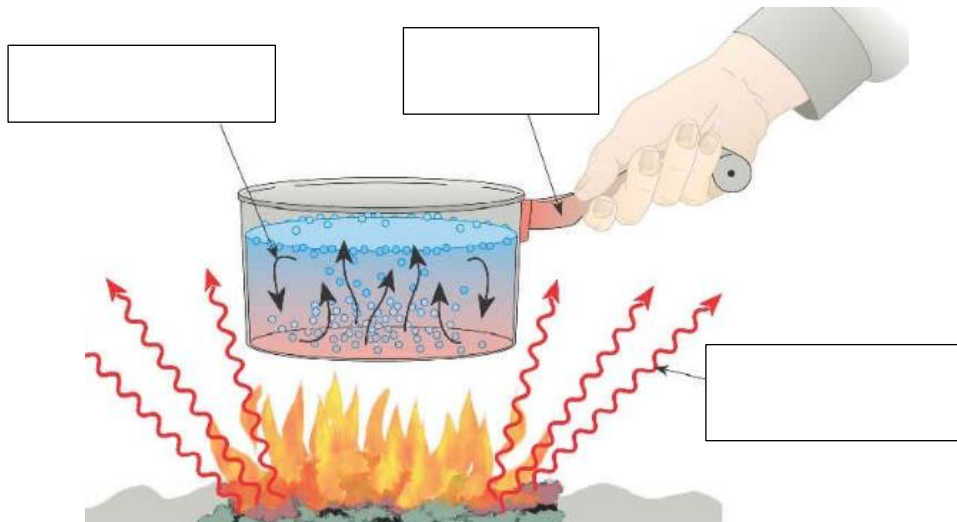
Chapitre 8 : Conduction thermique et transfert conducto-convectif

I- Le flux thermique ou puissance thermique

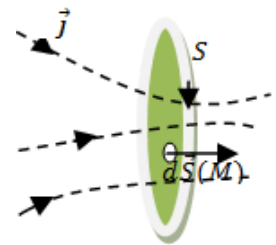
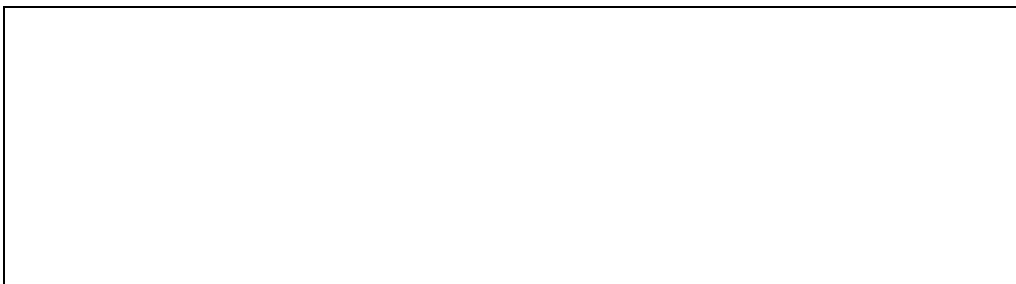
a) Les trois modes de transferts thermiques

Convection	Rayonnement	Diffusion thermique ou conduction thermique
Transfert propre aux fluides assuré par un mouvement macroscopique (naturelle ou forcée) : chaque particule de fluide transporte son énergie interne en se déplaçant	Transfert lié au flux lumineux d'une source de photons d'énergie $h\nu$ et dont la propagation ne nécessite aucun support (h constante de Planck et ν fréquence du rayonnement)	Transfert thermique qui a pour origine un champ de température inhomogène et décrivant la propagation de proche en proche de l'agitation thermique

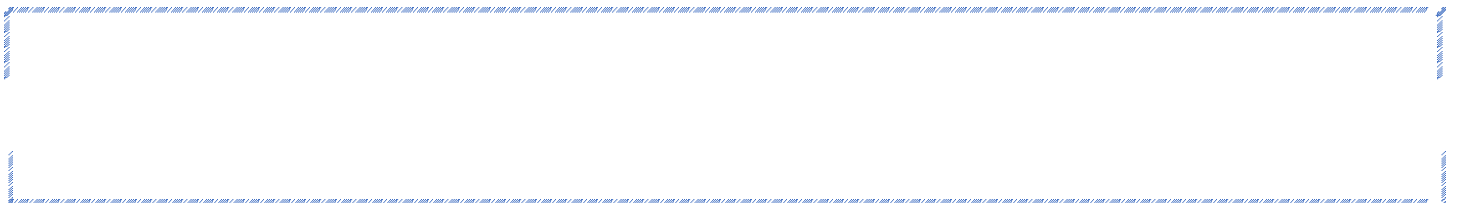
Identifiez sur le dessin ci-dessous les trois modes de transfert thermique :



b) Le vecteur densité de flux thermique ou vecteur densité de flux de chaleur



Effectuer un bilan de puissance à travers une surface fermée délimitant un volume V (on note $P_{th,e} > 0$ la puissance qui rentre et $P_{th,s} < 0$ la puissance sortante) :

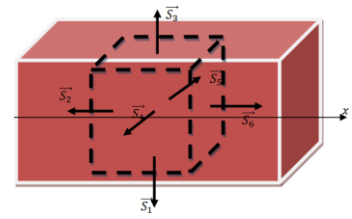


II- Conduction thermique dans un solide

a) Bilan global

On étudie la conduction thermique à l'intérieur d'un solide, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c dépourvue de source interne de chaleur (pas de résistance chauffante ou de réactions chimiques ou nucléaires). Nous supposons le processus monobare :

Soit V le volume de notre système fermé, alors pendant dt :



Ainsi, en régime stationnaire :

b) Exemples en régime stationnaire : Déterminer l'expression de $\vec{j}$

Conduction stationnaire unidirectionnelle et unidimensionnelle : $\vec{j} = j(x)\vec{u}_x$ avec $d\vec{S} = dS\vec{u}_x$	Conduction stationnaire radiale à symétrie cylindrique : $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ avec $d\vec{S} = dS\vec{u}_r$

c) Bilan local

Mener un bilan enthalpique sur un élément de volume $dV = dx dy dz$ et pour une conduction thermique unidirectionnelle telle que $\vec{j} = j_x(x, y, z, t)\vec{u}_x$ (en repérage cartésien) aboutit à :

A la manière d'un bilan de masse, effectuer un bilan local enthalpique sur un élément de volume dV d'une phase condensée idéale en condition monobare (masse volumique ρ et capacité thermique massique c)

Commenter la situation du régime stationnaire

III- Loi de Fourier et de Newton

a) Enoncé de la loi de Fourier

Expérimentalement, on observe une conduction thermique lorsqu'un milieu présente une inhomogénéité spatiale de la température. Ce flux est alors dirigé des régions les plus chaudes vers les régions les plus froides.

Rq : Nous allons considérer des milieux pour lesquels λ est uniforme. Par exemple : $\lambda_{\text{métal}} \approx 100 \text{ W m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\lambda_{\text{verre}} \approx 1 \text{ W m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\lambda_{\text{air}} = 0,01 \text{ W m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (dans les conditions usuelles).

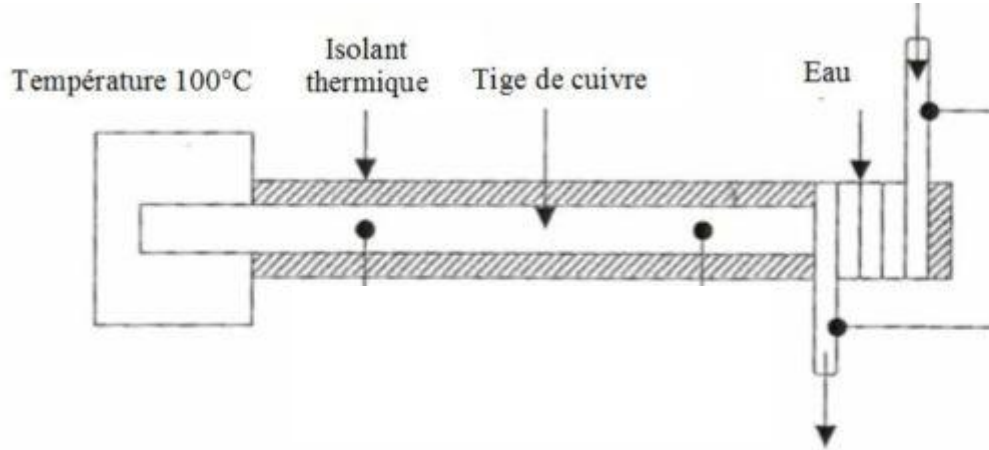
Déterminer l'expression de la résistance thermique dans les cas suivant :

Conduction stationnaire unidirectionnelle et unidimensionnelle : $\vec{j} = j(x)\vec{u}_x$ avec $d\vec{S} = dS\vec{u}_x$	Conduction stationnaire radiale à symétrie cylindrique : $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ avec $d\vec{S} = dS\vec{u}_r$

IV- Equation de la chaleur

a) Conduction thermique unidirectionnel (et donc unidimensionnel) $\vec{j} = j_x(x, t)\vec{u}_x$

Dans le cas où le flux n'est lié qu'à la conduction au sein d'une tige de longueur L , de conductivité λ , de masse volumique ρ , chauffée à une extrémité et refroidie à l'autre et calorifugée par ailleurs.

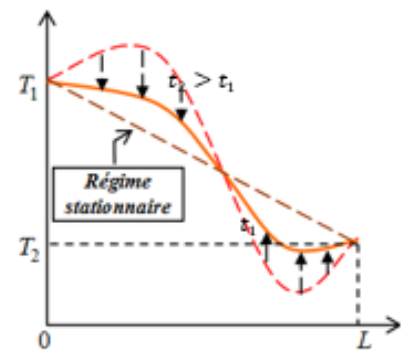


b) Résolutions analytiques

i) Méthode 1 : Résolution graphique

- En régime stationnaire le profil des températures est linéaire (courbures et variations temporelles sont liées)
- En régime variable, on pourra noter que la concavité spatiale régit l'évolution temporelle

ii) Méthode 2 : Résolution « dimensionnelle »



RQ : Cette équation témoigne de l'irréversibilité de la conduction thermique car elle n'est pas invariante par renversement temporelle $t \rightarrow -t$

iii) Méthode 3 : Résolution numérique

Numériquement, on va « découper » la tige en cellules de longueur δ et échantillonné avec un pas T_e . Le problème consiste donc à trouver les valeurs d'un tableau 2D dont chaque valeur est $T[x_i, t_j] = T[i, j]$. Avec des formules de différence finie, on a :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \equiv \frac{T[i, j+1] - T[i, j]}{T_e}$$

$$\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} \equiv \frac{\lambda}{\rho c} \frac{T[i+1, j] + T[i-1, j] - 2T[i, j]}{\delta^2}$$

En utilisant un schéma d'Euler explicite et en posant $K = \frac{\lambda T_e}{\rho c \delta^2}$

$$T[i, j+1] = T[i, j] * (1 - 2K) + K(T[i+1, j] + T[i-1, j])$$

Ce bilan doit être repris aux extrémités afin de prendre en compte les flux thermiques rentrant et sortant associés à une puissance surfacique P_s

En $x = 0$, avec $dV = S\delta$

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x=0} dV = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} S + P_s S$$

$$T[0, j+1] = T[0, j](1 - K) + KT[1, j] + \frac{P_s T_e}{\rho c \delta}$$

En $x = L$:

$$T[-1, j+1] = T[-1, j](1 - K) + KT[-2, j] - \frac{P_s T_e}{\rho c \delta}$$

On peut récrire le problème sous forme matricielle avec, pour chaque instant :

$$\vec{T}_i[j+1] = M \vec{T}_i[j]$$

$$\begin{pmatrix} T_{i=0}(t_{j+1}) \\ \vdots \\ T_i(t_{j+1}) \\ \vdots \\ T_L(t_{j+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-K & K & & & \\ K & 1-2K & K & & \\ & K & 1-2K & K & \\ & & K & 1-2K & K \\ & & & \dots & K \\ & & & K & 1-2K & -K \\ & & & & K & 1-K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{i=0}(t_j) \\ \vdots \\ T_i(t_j) \\ \vdots \\ T_L(t_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P_s T_e}{\rho c \delta} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{P_s T_e}{\rho c \delta} \end{pmatrix}$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.colors as colors
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

#constante
L=1
duree=10**4
Te=duree/10**4
delta=L/10
```

```

Nt=int(duree/Te)+1
Nx=int(L/delta)+1
t=np.linspace(0,duree,Nt)
x=np.linspace(0,L,Nx)
rho=10**4
lamb=400
c=400
K=(rho*c*delta**2/(Te*lamb))**-1

#conditions initiales
Tmin=20
Tmax=60
T=np.zeros((Nt,Nx))
T[0,:]=-(Tmax-Tmin)/L*x+Tmax

#matrice
M=np.zeros((Nx,Nx))
M[0,0]=M[-1,-1]=1-K
M[0,1]=M[-1,-2]=K

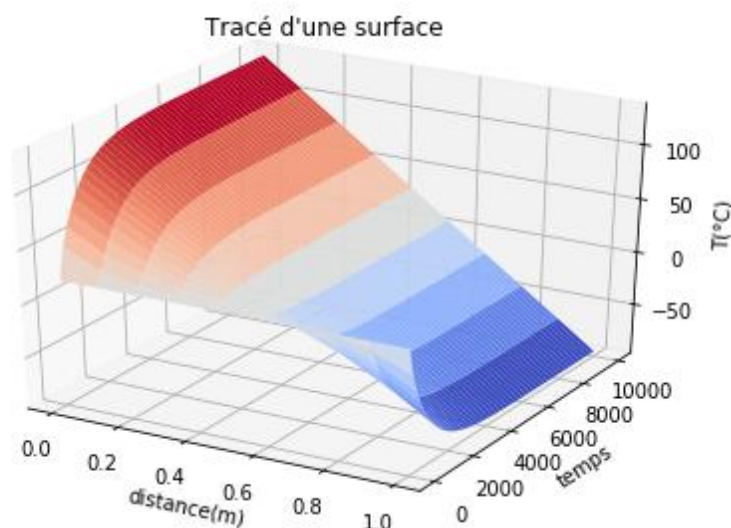
for i in range(1,Nx-1):
    M[i,i]=1-2*K
    M[i,i-1]=M[i,i+1]=K

for j in range(Nt-1):
    T[j+1,:]=np.dot(M,T[j,:])

for i in range(Nx):
    plt.plot(t,T[:,i])
plt.show()

#évolution spatio-remtemporelle
tab_x,tab_t=np.meshgrid(x,t)
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
ax.plot_surface(tab_x, tab_t, T, cmap=plt.cm.coolwarm, linewidth=0) # Tracé d'une surface
plt.title("Tracé d'une surface")
ax.set_xlabel('distance(m)')
ax.set_ylabel('temps')
ax.set_zlabel('T(°C)')
plt.tight_layout()
plt.show()

```



iv) Méthode 3 : La méthode de séparation des variables

On veut résoudre : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

On propose $T(x, t) = g(t)h(x)$

On a alors :

$$g \frac{\partial h}{\partial t} = D h \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$\frac{h'(t)}{h} = D \frac{g''(x)}{g}$$

Cette égalité implique (pour éviter toute divergence) :

$$\frac{h'(t)}{h} = Cte < 0 = -\frac{1}{\tau}$$

Donc : $h(t) = h_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

Et : $g(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$

Avec : $k = \sqrt{\frac{1}{D\tau}}$

Donc :

$$T(x, t) = g(t)h(x) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(kx) + B \sin(kx))$$

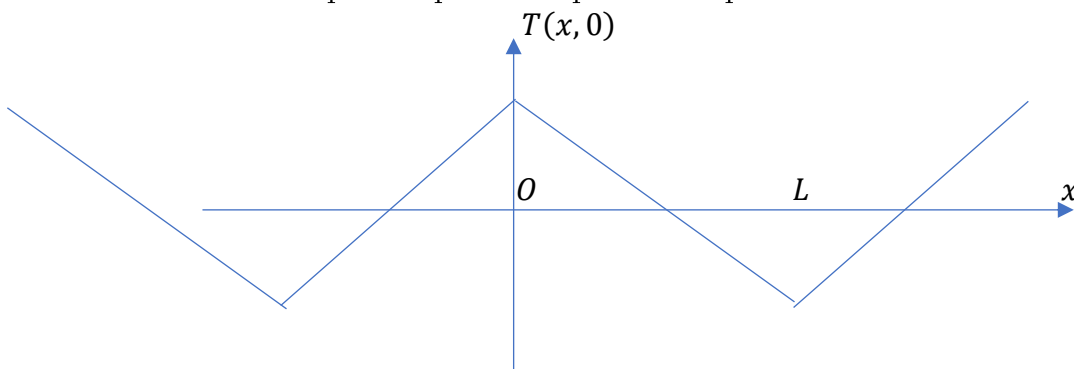
Comme la tige est calorifugée : $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x=L} = 0$

Ainsi $B = 0$ et $kL = n\pi$ et $k = \frac{n\pi}{L}$ et $\tau = \frac{1}{Dk^2}$

Donc :

$$T(x, t) = g(t)h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{t}{\tau_n}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

On retrouve alors que la situation initiale $T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ permet d'accéder aux coefficients A_n qui peuvent être vus comme les coefficients de Fourier des conditions initiales modélisées comme une fonction périodique de l'espace et de période $2L$:



Cette fonction est paire et :

$$A_i = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L T(x, 0) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \left(T_{max} - \left(\frac{T_{max} - T_{min}}{L}\right)x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$A_i = \frac{2T_{max}}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx - \frac{2}{L} \left(\frac{T_{max} - T_{min}}{L}\right) \int_0^L x \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$A_i = \frac{2}{L} \left(\frac{T_{max} - T_{min}}{L}\right) \int_0^L x \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$A_i = -2 \left(\frac{T_{max} - T_{min}}{n^2 \pi^2}\right) ((-1)^n - 1)$$

Si on rajoute la valeur asymptotique de la température, alors :

$$T(x, t) = T_{moy} + \sum_{n=1}^{\infty} -2 \left(\frac{T_{max} - T_{min}}{n^2 \pi^2}\right) ((-1)^n - 1) e^{-\frac{t}{\tau_n}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$