

Chapitre 5 : Les équations de l'électromagnétisme

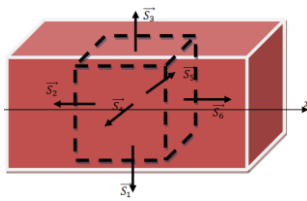
I- L'équation de conservation de la charge

a) Démonstration

Soit un échantillon de matière traversé par un courant d'intensité $i(M, t)$ (associé à un vecteur densité de courant $\vec{j}(M, t)$). On note $\rho(M, t)$ la densité volumique de charges et on postule la conservation de la charge.

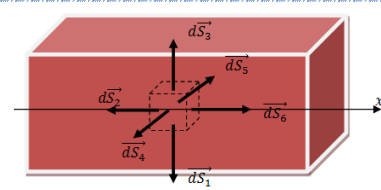
- En vous inspirant de la démonstration de l'équation de conservation de la masse, effectuer un bilan de charge et obtenir l'équation traduisant la conservation de la charge

Analyse globale



Soit V le volume de notre système, alors pendant dt (en notant i_e et i_s les intensités des courants entrant et sortant de V) :

Analyse locale

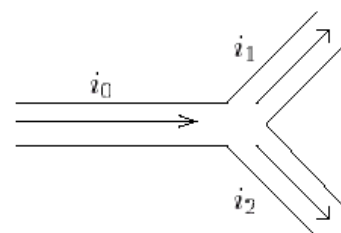


Soit $dq(M, t) = \rho(M, t)dV$ la charge de notre système (volume $dV = dx dy dz$), pendant dt , nous avons :

b) Cas particulier du régime stationnaire

En régime stationnaire la charge d'un échantillon n'évolue pas et l'équation bilan conduit à $\text{div} \vec{j} = 0$

- Démontrer la loi des nœuds en régime stationnaire



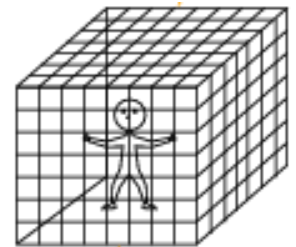
II- Equations Maxwell du régime stationnaire à l'approximation des régimes quasi-stationnaires

a) Rappels : Equations de Maxwell en régime stationnaire

- En utilisant MG et l'équation de conservation de la charge, montrer que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$ et que toute accumulation de charge « s'évanouie » très rapidement au sein d'un conducteur de conductivité $\gamma = 10^8 S.m^{-1}$ (la permittivité diélectrique du vide est $\epsilon_0 \approx 10^{-11} F.m^{-1}$).

Dans un milieu ne présentant pas d'accumulation de charge en volume (comme dans un conducteur à l'équilibre), on a $\Delta V = 0$. Cette équation est appelée alors équation de Laplace. Cette équation admet une solution unique vérifiant naturellement l'équation et les conditions aux limites de problème.

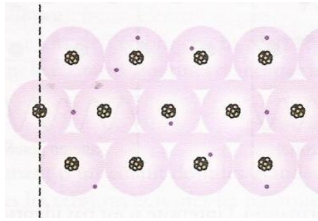
- Une cage conductrice est reliée à la masse dont le potentiel est considéré nul. Donner l'expression du potentiel dans la cage sachant que le problème de Laplace n'admet qu'une unique solution une fois les conditions aux limites fixées.



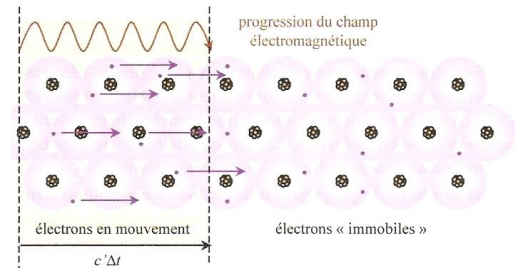
b) L'approximation des régimes quasi-stationnaires

Lorsque l'on applique un potentiel à l'extrémité d'un conducteur de longueur d alors ce potentiel met un temps $\Delta t = \frac{d}{c'}$ pour être ressenti à l'extrémité du conducteur (c' représente alors la vitesse de propagation du potentiel dans le conducteur. Cette vitesse est de l'ordre de $10^8 m/s$).

Modification du
potentiel à $t = 0$



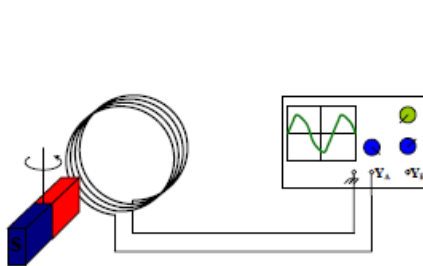
Propagation du
signal électrique



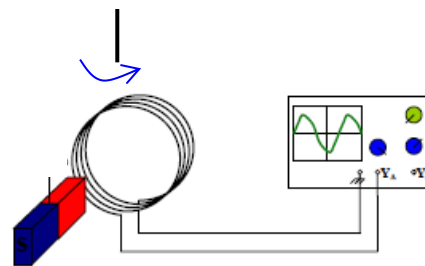
- Considérons un générateur de tension variable imposant alors une tension périodique T sur un barreau conducteur de longueur d . On note $c' \approx 10^8 m.s^{-1}$ la vitesse de propagation du champ électrique généré par le générateur. Ecrire une inégalité permettant de négliger ce temps de propagation (et donc de revenir à une situation quasi-identique au régime stationnaire). Proposer une limitation en fréquence pour un circuit de TP.

c) Rappels sur l'induction dans les milieux conducteurs fermés

On observe une tension, appelée tension induite, dans les deux situations suivantes :

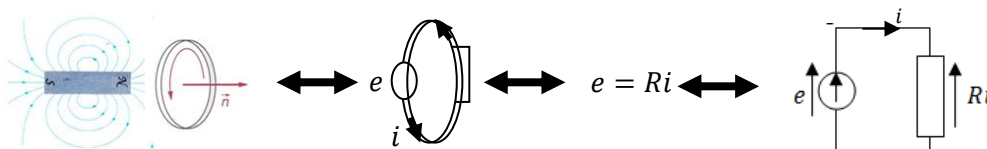


Circuit fixe dans un champ magnétique variable



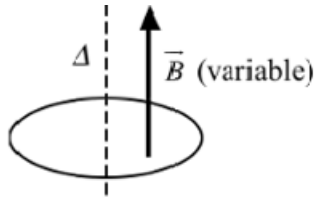
Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Le circuit résistif est alors, dans une première approche, modélisable par :

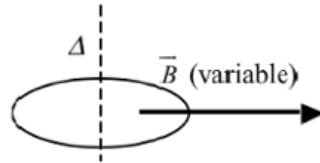


Tension induite e et courant induit i sont fléchés en convention générateur. Le sens de fléchage commun à e et i fixe également l'orientation de \vec{n} avec la règle du tire bouchon.

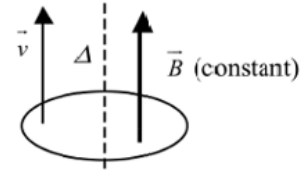
- Dans chacune des situations suivantes déterminer l'expression du courant induit en sachant que la spire présente une résistance interne de R et une surface S



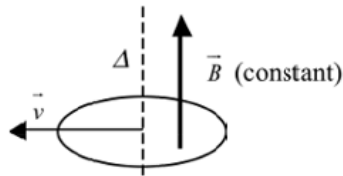
Spire immobile dans un champ magnétique $B_0 \cos(\omega t)$ uniforme parallèle à Δ



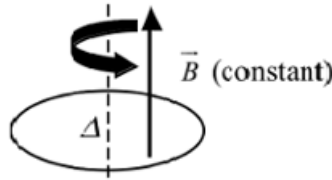
Spire immobile dans un champ magnétique $B_0 \cos(\omega t)$ uniforme perpendiculaire à Δ



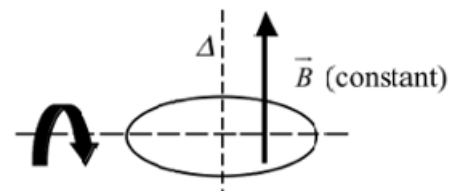
Spire animée d'une vitesse \vec{v} parallèle à Δ dans un champ magnétique uniforme et constant



Spire animée d'une vitesse \vec{v} perpendiculaire à Δ dans un champ magnétique uniforme et constant



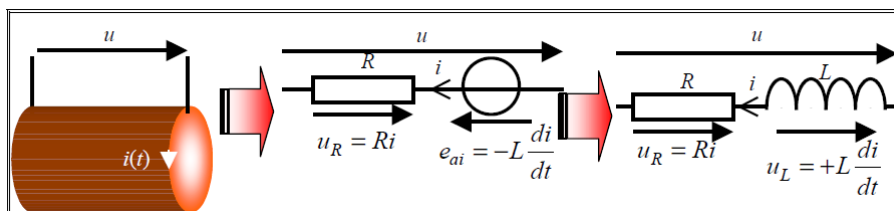
Spire en rotation autour de Δ dans un champ magnétique uniforme et constant.



Spire en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe perpendiculaire à Δ dans un champ magnétique uniforme et constant.

En toute rigueur, il faut tenir compte du champ magnétique rayonné par le circuit lui-même (traversé par un courant d'intensité i) et responsable d'un flux propre $\phi_p = Li(t)$ où $L > 0$ est l'inductance propre du circuit $[L] = [H]$ et donc d'une tension auto-induite e_{ai}

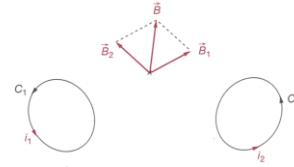
La modélisation électrique d'une bobine d'inductance L , de résistance R qui n'est le siège que d'un phénomène d'auto-induction est :



- Déterminer le flux propre d'un solénoïde supposé infini et en déduire l'expression de son inductance propre

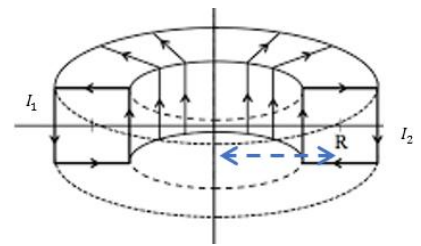
$$\Phi_p = N \iint \frac{\mu_0 N}{l} i(t) dS = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} i(t) \text{ d'où } L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

On considère maintenant une situation pour laquelle deux circuits seront en influence mutuelle mais aussi propre : on distingue alors flux propres et mutuelles :



Effets inducteurs de $i_1(t)$	Effets inducteurs de $i_2(t)$
Auto-induction du circuit C_1 avec un flux propre $\phi_{p1} = L_1 i_1$	Auto-induction du circuit C_2 avec un flux propre $\phi_{p2} = L_2 i_2$
Induction du circuit 2 avec un flux mutuel $\phi_{1-2} = M i_1$	Induction du circuit 1 avec un flux mutuel $\phi_{2-1} = M i_2$

- Sur un tore de section carré (côtés de longueur a) sont bobinés deux circuits comportant respectivement N_1 et N_2 spires jointives. C_1 recouvre toute la surface du tore et C_2 recouvre intégralement C_1 (on néglige l'épaisseur de la distribution de courant qui présente également une invariance par rotation autour de l'axe du tore). C_1 est parcouru par un courant d'intensité $I_1 > 0$ et C_2 est parcouru par un courant d'intensité $I_2 > 0$. Montrer que l'inductance mutuelle M et les inductances propres L_1, L_2 sont telles que $M^2 = L_1 L_2$.



d) Equation de Maxwell-Faraday

Comme $\overrightarrow{rot E_m} \propto \vec{B}$ alors :

- Le champ électromoteur est antisymétrique par rapport \vec{B} et donc symétrique par rapport à la distribution de courant associée
- Les lignes de champ de $\vec{E_m}$ sont fermées et tournent localement autour de $\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$

III- Equations de Maxwell en régime variable

a) Equation de Maxwell-Ampère en régime variable

b) Bilan

➤ Remplir le tableau suivant

	Tout milieu et toute fréquence	Conducteur fermé en ARQS	Dans le vide
Maxwell Gauss			
Maxwell Faraday			
Maxwell Flux			
Maxwell Ampère			

On notera le couplage des champs en régime variable : on parlera donc de champ électromagnétique.

IV- Energie électromagnétique

a) Bilan d'énergie locale

Considérons une distribution de charges et de courants $\{\rho, \vec{j}\}$ créant un champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$: toutes ces grandeurs étant reliées dans les équations de Maxwell. Et manipulons un peu ces équations :

$$MA. \vec{E} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{rot} \vec{B} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E^2/2}{\partial t}$$

$$MF. \vec{B} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{rot} \vec{E} \cdot \vec{B} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{B} = -\frac{\partial B^2/2}{\partial t}$$

Avec la formule de l'analyse vectorielle : $div(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \overrightarrow{rot} \vec{E} \cdot \vec{B} - \overrightarrow{rot} \vec{B} \cdot \vec{E}$ alors :

$$-div(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E^2/2}{\partial t} + \frac{\partial B^2/2}{\partial t}$$

$$-div(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

On notera que dans un milieu vide de charge : $\frac{\partial u_{e,m}}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{\pi})$

b) Bilan intégrale de l'énergie

Avec le théorème d'Ostrograski, un système de volume V et d'énergie électromagnétique $U_{e,m}(t) = \iiint_V u_{e,m} dV$ vérifie :

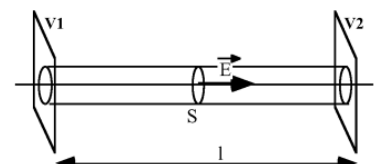
$$\frac{dU_{e,m}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V u_{e,m} dV = \iiint_V \frac{\partial u_{e,m}}{\partial t} dV = - \iiint_V \operatorname{div}(\vec{\pi}) dV - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

$$\frac{dU_{e,m}(t)}{dt} = - \oint \vec{\pi} \cdot d\vec{S}_{ext} - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

Ainsi l'énergie électromagnétique d'un volume V (délimité par une surface fermée S) varie dans le temps par la puissance échangée avec les charges contenue dans V et par un bilan de puissance électromagnétique globalement non nul dans S .

Dans un milieu vide de charge, on a $\frac{dU_{e,m}(t)}{dt} = - \oint \vec{\pi} \cdot d\vec{S}_{ext}$

- Soit un conducteur de section S , de rayon R , de longueur l , de conductivité γ siège d'un courant d'intensité I sous l'action d'un champ électrique \vec{E} uniforme et associé à la ddp $V_1 - V_2 = U$. On néglige les effets de bords en supposant l infini et le régime est stationnaire.



Déterminer :

- Le champ magnétostatique

- L'expression du vecteur de Poynting

- La puissance rentrant à travers les parois du conducteur