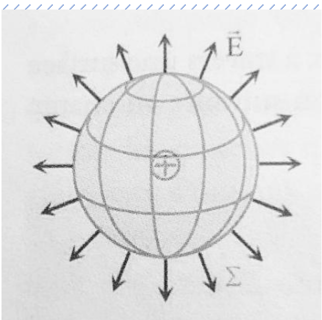
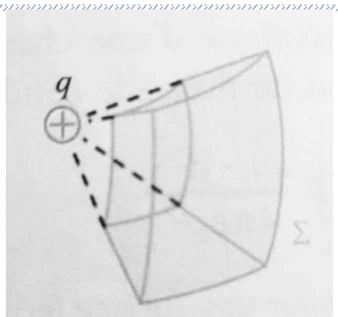
Chapitre 3 : Théorème de Gauss et condensateur

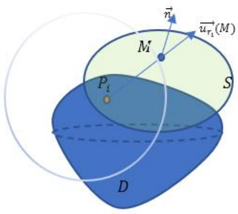
I- Théorème de Gauss :

a) Présentation du théorème de Gauss

Calculer le flux du champ électrique associé à une charge ponctuelle q située en O (origine d'un repérage sphérique) à travers les surfaces fermées suivantes :

Flux à travers une sphère de rayon r centrée en O	Flux à travers un élément de volume sphérique : $dV = r^2 sin\theta d\theta d\varphi$
	

b) Démonstration du théorème de Gauss



Soit D une distribution quelconque de N charges ponctuelles et q_{P_i} une charge de D située au point P_i.

Mesurons le flux du champ électrique créé par D à travers une surface S fermée et quelconque.

$$\phi = \oiint \sum_{i=1}^{N} \frac{q_{Pi}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \overrightarrow{u_{ri}}.dS\vec{n} = \sum_{i=1}^{N} \oiint \frac{q_{Pi}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \overrightarrow{u_{ri}}\, dS\vec{n}$$

La quantité $dS\vec{n}.\overrightarrow{u_{ri}}$ correspond à la projection de $d\vec{S}$ suivant $\overrightarrow{u_{ri}}$ et donc à $r_i^2 sin\theta_i d\theta_i d\varphi_i$:

- Pour des charges dans S alors pour décrire toute la surface S : $\phi = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_{Pi}}{\varepsilon_0}$
- Pour des charges extérieures $\oiint \frac{q_{Pi}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \overrightarrow{u_{ri}}\, dS\vec{n} = 0$ à cause du flux rentrant et sortant intégrés sous le même angle solide mais au signe près.

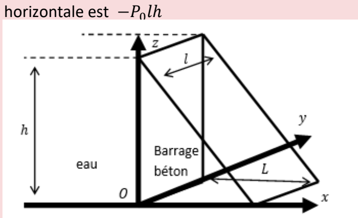
c) Enoncer du théorème de Gauss :

Commenté [A1]: Problématique :
Comment expliquer l'effet Faraday et l'effet de pointe

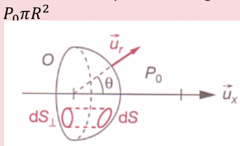
Vidéos du palais de la découverte
http://phymain.unisciel.fr/faire-taire-une-radio/

Nous allons présenter au cours de ce chapitre une troisième méthode permettant de calculer le champ électrostatique : le théorème de Gauss. Cette méthode sera, on le verra, un moyen rapide d'obtenir l'expression du champ dans les cas de distributions présentant de hautes symétries.

Commenté [AM2]: Nous avons déjà rencontré cette situation statique des fluides :
Exemple 1 : La calcul de la force pressante atmosphérique horizontale est $-P_0 lh$



Pour une hémisphère de Magdebourg, la force pressante est $P_0 \pi R^2$



d) Symétrie et invariance du champ électrostatique

Le principe de Curie postule que le champ électrostatique possède les mêmes propriétés d'invariance et de symétrie que la distribution de charges qui en est à l'origine. Il convient donc de ne pas confondre invariance et symétrie :

e) Du théorème de Gauss à l'équation de Maxwell-Gauss

En associant à la distribution de charges une densité volumique de charges $\rho(M)$, on peut écrire (avec S surface de Gauss quelconque et V volume délimité par cette surface) :

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V div\vec{E} dV = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} dV$$

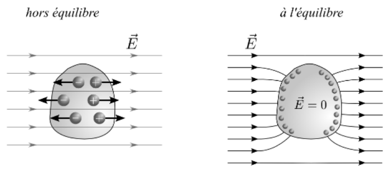
Commenté [A3]: On retrouve que le champ électrostatique est à flux conservatif dans une zone sans charge : des lignes de champ parallèles sont donc associées à un champ uniforme. Attention $div\vec{E} = 0$ mais le champ n'est pas nul pour autant !!!

Commenté [AM4]: $\iiint_V \left(div\vec{E} - \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}\right) dV = 0$
Comme cette intégrale doit être nulle pour tout volume alors : $div\vec{E} = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$

II- Conducteur, condensateur et capacité

a) Conducteur et conducteur en équilibre

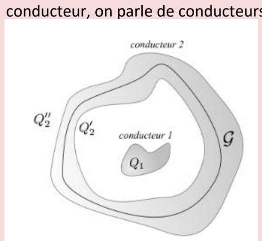
Dans un conducteur à l'équilibre, on a alors :



- une force électrique $q\overrightarrow{E_{cond}} = \vec{0} \rightarrow$ le champ électrique $\overrightarrow{E_{cond}}$ dans un conducteur à l'équilibre est nul.
- $\overrightarrow{E_{cond}} = -\overrightarrow{grad}V_{cond} = \vec{0}$, un conducteur à l'équilibre est un volume équipotentiel.
- d'après MG alors $div\overrightarrow{E_{cond}} = 0$ ce qui impose $\rho_{cond} = 0$. Ainsi une situation d'équilibre observée dans un conducteur est celle minimisant l'énergie potentielle entre les charges et conduit à une distribution surfacique.

b) Définition d'un condensateur

Commenté [AM5]: Deux conducteurs placés au voisinage l'un de l'autre vont s'influencer mutuellement. Dans le cas où toutes les lignes de champ de l'un se termine sur l'autre conducteur, on parle de conducteurs en influence total.

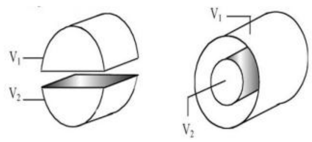


La linéarité des équations de l'électromagnétisme laisse penser que :
$Q_1 = aV_1 + bV_2$
Or si $V_1 = V_2$ alors aucune ligne de champ relie les deux conducteurs et donc, avec le théorème de Coulomb, $Q_1 = 0$
Donc $a = -b$
Soit $Q_1 = C(V_1 - V_2)$
Relions l'extérieur du conducteur 2 à la terre : $Q_2'' = 0$ et $V_2 = 0$.
Avec le théorème des éléments correspondants : $Q_1 = -Q_2'$

III- Modèle du condensateur plan

a) Description

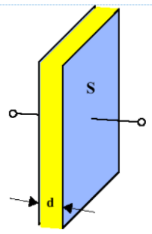
Il s'agit de deux surfaces S conductrices planes parallèles (A_1 et A_2) dont les dimensions sont grandes par rapport à la distance e qui les sépare (on néglige les effets de bord). Nous allons considérer chacune des armatures comme des plans infinis et chargés respectivement avec une charge +Q et -Q



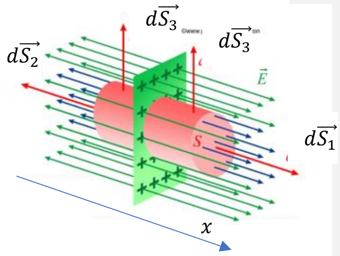
b) Capacité du condensateur plan idéal :

Commenté [A6]: La méthode pour les autres types de condensateur reste la même :
Obtenir E(Q)
Puis V(Q) à l'aide de la relation qui relie champ et potentiel

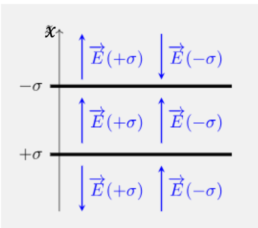
On considère un condensateur idéal constitué de deux plans de surface S distants de $e \ll \sqrt{S}$ chargé uniformément en surface avec une densité $\pm\sigma$.



1) On souhaite déterminer le champ électrique créé par la plaque charge $+\sigma$ à l'aide du théorème de Gauss. Utiliser le cylindre de Gauss S placé symétriquement par rapport au plan pour déterminer le champ électrique créé par cette seule armature.



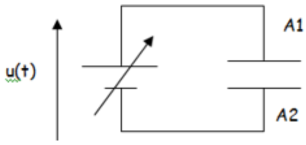
2) En déduire alors le champ créé par les deux armatures en utilisant le principe de superposition.



3) En déduire une expression de la tension U aux bornes du condensateur en fonction de la charge Q portée par les armatures. En déduire l'expression de la capacité C de ce condensateur

c) Energie électrique d'un condensateur

On considère le circuit ci-contre, à $t = 0$ le condensateur de capacité C est déchargé (pas de charge sur les armatures)



A t, le potentiel de A₁ est $v_1(t)$ et le potentiel de A₂ est $v_2(t)$

1) Donner une expression entre la charge $q(t)$ qui se condense sur les armatures, $v_1(t)$ et $v_2(t)$

A t_{fin} la tension $u(t) = U = cte$ et le condensateur se charge avec une charge Q vérifiant $Q = CU$

L'arrivée d'une charge $-dq$ sur A_2 entraîne une charge $+dq$ sur A_1 pendant l'intervalle de temps dt.

2) Donner l'expression de la variation d'énergie potentielle totale dE_p pendant dt

3) En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrique stockée par le condensateur.

4) Sachant que $U = eE$ et connaissant l'expression de la capacité $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$, montrer que l'on peut définir une densité volumique d'énergie électrique du condensateur