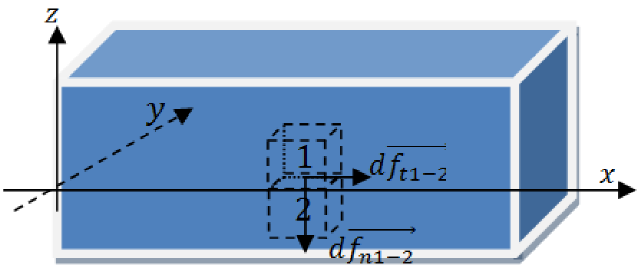
Chapitre 7 : Du premier principe à l'équation de Bernoulli

I- Fluide réel

a) Force de viscosité

Soient deux volumes mésoscopiques de fluide notés 1 et 2 de surface commune dS en écoulement unidirectionnel $\vec{v} = v_x(z)\overrightarrow{u_x}$.



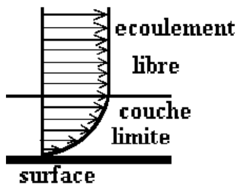
b) Profil des vitesses

Origine de la viscosité

L'origine microscopique de la viscosité tient au mouvement thermique (brownien) des molécules du fluide. La vitesse d'une particule de fluide possède deux composantes : une composante thermique, désordonnée, et une composante macroscopique liée au mouvement d'ensemble du fluide. Lorsqu'une particule passe d'une couche à sa voisine plus lente, elle emporte avec elle sa vitesse d'ensemble, propre à la couche d'où elle vient. Lors des collisions avec les particules de la couche d'arrivée, elle partage l'excédent de quantité de mouvement qu'elle possède, et ce transfert, compte tenu de la dynamique chaotique des particules, est irréversible. En moyennant ce transfert de quantité de mouvement entre couches voisines, on obtient un effet macroscopique.

Notion de couche limite

L'expérience montre que les fluides réels mouillent les obstacles fixes, c'est-à-dire qu'à l'échelle moléculaire, une couche de liquide se fixe sur un obstacle. Ainsi, la vitesse du fluide relativement à la conduite augmente de zéro au niveau de la paroi jusqu'à une valeur correspondant à l'écoulement externe. Cette zone de transition est appelée couche limite.



Dans une conduite cylindrique, les couches limites vont interférer ensembles pour donner, en régime laminaire, un profil parabolique.

Coefficient de viscosité

Fluide	Viscosité à 20°C (Pl ou $Pa.s$)
Eau	$1{,}0 \times 10^{-3}$
Pétrole	$0{,}66$
Air	$1{,}8 \times 10^{-5}$

Fluide Newtonien

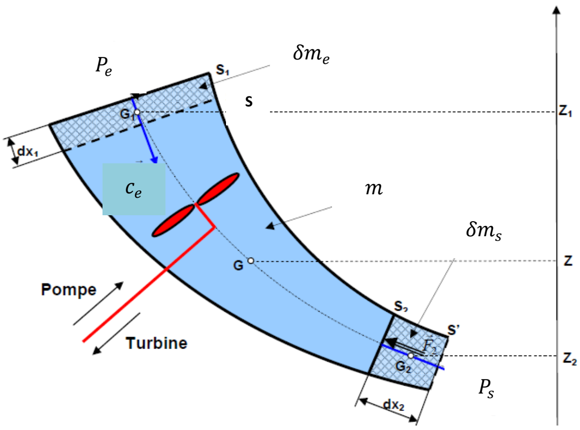
Si la viscosité ne dépend que de la nature de l'échantillon et de sa température alors le fluide est dit newtonien.

Si la viscosité est fonction de la vitesse de l'écoulement alors il est non newtonien.

II- Ecoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible

a) Position du problème

Soit un tube de courant, centrée autour d'une ligne de courant, suffisamment étroit pour que la pression P soit uniforme sur toute section droite.



Le système fermé étudié est délimité entre les sections S_1 et S_2 à l'instant t et entre les sections S et S' à l'instant $t+dt$. Nous supposerons qu'un travail indiqué δW_i peut être échangé avec une machine (en revanche aucun transfert thermique avec l'extérieur ne sera transmis : $Q = 0$).

b) Hypothèses

c) Application du 1e principe au système fermé

Rappels : 1e principe des systèmes ouverts en écoulement stationnaire

Le système étudié étant fermé, on a donc :

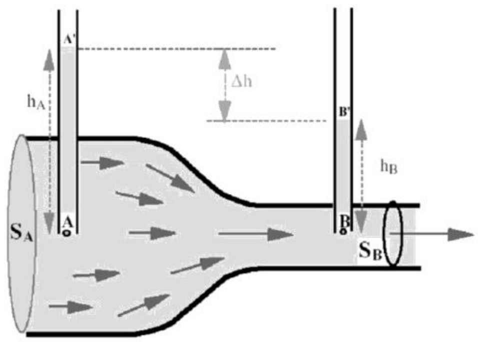
$$\left(E_{c_{mac},com}(t+dt)+\frac{\delta m c_s^2}{2}\right)-\left(E_{c_{mac},com}(t)+\frac{\delta m c_e^2}{2}\right)$$
$$+\left(E_{p_{mac},com}(t+dt)+\delta m g z_s\right)$$
$$-\left(E_{p_{mac},com}(t)+\delta m g z_e\right)$$
$$+\left(U_{,com}(t+dt)+\delta m u_s\right)$$
$$-\left(U_{com}(t)+\delta m u_e\right)$$
$$=P_e \delta m v_e - P_s \delta m v_s + \delta W_i + \delta Q$$

Soit, d'après l'hypothèse stationnaire :

$$\delta m\left(h_s-h_e+\frac{c_s^2}{2}-\frac{c_e^2}{2}+g z_s-g z_e\right)=\delta W_i+\delta Q$$

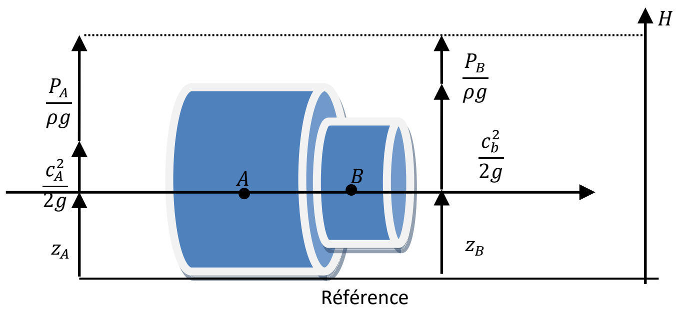
Effet venturi

Il est alors possible d'appliquer Bernoulli entre A et B: $\frac{P_A}{\rho}+\frac{c_A^2}{2}=\frac{P_B}{\rho}+\frac{c_B^2}{2}$ si l'écoulement est bien stationnaire et le fluide parfait et incompressible. On a aussi la conservation du débit volumique $c_A S_A = c_B S_B$ Ce qui implique $P_s < P_e$



Notion de charge d'un fluide

On peut écrire la relation de Bernoulli sous la forme :$H = z+\frac{c^2}{2g}+\frac{P}{\rho g}=Cte$ ce qui se traduit par une conservation d'une hauteur appelée charge de l'écoulement.



d) Approximations courantes

Soit une canalisation horizontale siège d'un écoulement de rayon $R \approx 5cm$. Sur chaque section droite nous pouvons supposer :

- Le champ des vitesses uniforme avec l'hypothèse d'un fluide parfait,
- La pression uniforme car $\Delta P = \rho_f g(2R) \approx \frac{P_{atmo}}{100}$
- L'altitude associée à une altitude moyenne $z = Cte$

Dans ces conditions la relation de Bernoulli s'écrit souvent entre deux sections de la conduite.

III- Ecoulement stationnaire d'un fluide réel et incompressible

a) Perte de charge régulière

Avec un fluide réel en écoulement dans un capillaire, on adapte l'écriture de la relation de Bernoulli précédente entre deux sections :

b) Perte de charge singulière

Ce type de perte se produit quand la conduite impose des brusques variations de directions. Pour ces pertes $w_f = -K\frac{c^2}{2}$ avec K une constante fonction de la géométrie de la canalisation.

Modèle de poiseuille

Considérons un tube de courant de longueur L centré sur l'axe z d'un capillaire de rayon R. Le volume de ce tube de champ est $V = \pi r^2 L$ et subit une force de viscosité donnée par :

$$\overrightarrow{F_t} = \eta \left(\frac{dv_x}{dr}\right)_{en\ r} 2\pi r L \overrightarrow{u_z}$$

La force pressante motrice est :

$$\overrightarrow{F_P} = \big(P(z) - P(z+L)\big)\pi r^2 \overrightarrow{u_z} = \Delta P \pi r^2 \overrightarrow{u_z}$$

On prend typiquement $\vec{v} = v_z(r)\overrightarrow{u_z}$, ce qui assure l'absence d'accélération le long d'une ligne de courant. Donc, il y a compensation des deux forces :

$$r\Delta P = -2\eta \left(\frac{dv_z}{dr}\right) L$$

$$\Delta P \int_r^R r dr = -2\eta L \int_{v(r)}^0 dv = 2\eta L v(r)$$

$$v(r) = \frac{\Delta P (R^2 - r^2)}{4\eta L}$$

Et donc un débit volumique :

$$D_v = \iint v(r) r d\theta dr = \frac{\Delta P}{8\eta L}\pi R^4$$

Soit : $\Delta P = R_h D_v$

On met alors en évidence une perte de charge :

$$\Delta H = \frac{|\Delta P|}{\rho g}$$