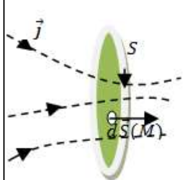
Chapitre 8 : Conduction thermique et transfert conducto-convetif

I- Le flux (ou puissance) thermique

a) Les trois modes de transferts thermiques

Transfert propre aux fluides assuré par un mouvement macroscopique (naturelle ou forcée) : chaque particule de fluide transporte son énergie interne en se déplaçant	Transfert lié au flux lumineux d'une source de photons d'énergie $h\nu$ et dont la propagation ne nécessite aucun support (h constante de Planck et ν fréquence du rayonnement)	Transfert thermique qui a pour origine un champ de température inhomogène et décrivant la propagation de proche en proche de l'agitation thermique

b) Le vecteur densité de flux de chaleur (ou densité de flux thermique)

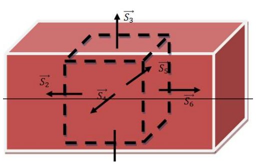


Dans le cas d'un bilan de puissance effectué sur une surface fermée délimitant un volume V (on note $P_{th,e} > 0$ la puissance qui rentre et $P_{th,s} < 0$ la puissance sortante) :

II- Conduction thermique dans un solide

a) Bilan global

On étudie la conduction thermique à l'intérieur d'un solide, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c dépourvue de source interne de chaleur (pas de résistance chauffante ou de réactions chimiques ou nucléaires). Nous supposerons le processus monobare :



Bilan local

$$dH(M,t+dt) - dH(M,t) = \sum_i \vec{j_i}.\overrightarrow{dS_{i,int}}\,dt$$

$$\frac{\partial dH}{\partial t}dt = \frac{\partial \rho h dV}{\partial t}dt = -div\vec{j}dVdt$$

$$\rho\frac{\partial h}{\partial t} = -div\vec{j}$$

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -div\vec{j}$$

Bilan global

$$dH = \oint\!\!\!\oint \vec{j}.\overrightarrow{dS_{int}}\,dt = -\oint\!\!\!\oint \vec{j}.\overrightarrow{dS_{ext}}\,dt$$

$$\frac{dH}{dt} = -\oint\!\!\!\oint \vec{j}.\overrightarrow{dS_{ext}} = -\iiint div\vec{j}dV$$

En régime stationnaire, l'équation bilan conduit à $div\vec{j} = 0$: le vecteur densité de flux thermique est à flux conservatif

b) Exemples en régime stationnaire

c) Bilan local

Un bilan enthalpique sur un élément de volume $dV = dxdydz$ et pour une conduction thermique unidirectionnelle telle que $\vec{j} = j_x(x,y,z,t)\overrightarrow{u_x}$ (en repérage cartésien) aboutit à :

III- Loi de Fourier et de Newton

a) Enoncé de la loi de Fourier

Expérimentalement, on observe une conduction thermique lorsqu'un milieu présente une inhomogénéité spatiale de la température. Ce flux est alors dirigé des régions les plus chaudes vers les régions les plus froides.

Rq : Nous allons considérer des milieux pour lesquels λ est uniforme. Par exemple : $\lambda_{métal} \approx 100Wm^{-1}.K^{-1}, \lambda_{verre} \approx 1Wm^{-1}.K^{-1}$ et $\lambda_{air} = 0{,}01Wm^{-1}.K^{-1}$ (dans les conditions usuelles).

Résolution numérique sur Python

Considérons une tige assujettie à une transfert thermique à ses deux extrémités. On règle la situation pour que la puissance qui rentre et qui sort de la tige soient les mêmes. Cette tige est calorifugée le long de toute sa surface latérale : la conduction thermique est donc unidirectionnelle (et unidimensionnelle).

Dans la tige, le bilan enthalpique donne : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$

La loi de Fourier impose : $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

Donc : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Numériquement, on va « découper » la tige en cellules de longueur δ et échantillonné avec un pas T_e. Le problème consiste donc à trouver les valeurs d'un tableau 2D don chaque valeur est $T[x_i, t_j] = T[i,j]$. Avec des formules de différence finie, on a :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \equiv \frac{T[i,j+1] - T[i,j]}{T_e}$$

$$\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T_i}{\partial {x_i}^2} \equiv \frac{\lambda}{\rho c}\frac{T[i+1;j] + T[i-1,j] - 2T[i,j]}{\delta^2}$$

En utilisant un schéma d'Euler explicite et en posant $K = \frac{\lambda T_e}{\rho c \delta^2}$

$$T[i,j+1] = T[i,j] * (1-2K) + K(T[i+1;j] + T[i-1,j])$$

Ce bilan doit être repris aux extrémités afin de prendre en compte les flux thermiques PS rentrant et sortant.

En $x = 0$, avec $dV = S\delta$

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x=0} dV = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} S + P_s S$$

$$T[0,j+1] = T[0,j](1-K) + KT[i,j] + \frac{P_s T_e}{\rho c \delta}$$

En $x = L$:

$$T[-1,j+1] = T[-1,j](1-K) + KT[-2,j] - \frac{P_s T_e}{\rho c \delta}$$

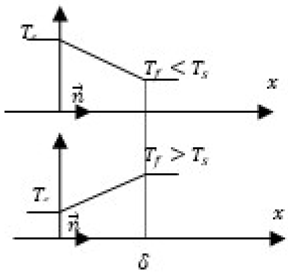
On peut récrire le problème sous forme matricielle avec, pour chaque instant :

$$\vec{T}_i[j+1] = M\vec{T}_i[j]$$

$$\begin{pmatrix} T_{i=0}(t_{j+1}) \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i(t_{j+1}) \\ \vdots \\ T_L(t_{j+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-K & K & & & & & \\ K & 1-2K & K & & & & \\ & K & 1-2K & K & & & \\ & & K & 1-2K & K & & \\ & & & & \dots & K & \\ & & & & K & 1-2K & -K \\ & & & & & K & 1-K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{i=0}(t_j) \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i(t_j) \\ \vdots \\ T_L(t_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{PT_e}{\rho c \delta} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{PT_e}{\rho c \delta} \end{pmatrix}$$

b) Loi de Newton : le transfert conducto-convectif

Pour un solide en contact avec un fluide à la température T_f (et de conductivité λ_f), on observe une couche limite d'épaisseur δ (typiquement du 1/10mm) dans laquelle la température évolue de la température de surface T_s du solide à la température T_f.



Pour traduire ce transfert thermique on utilise la loi de Fourier en supposant le profil ci-contre : $\vec{j} = \frac{\lambda_f(T_s - T_f)}{\delta}\vec{n} = h(T_s - T_f)\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire orienté vers la normale sortante du solide et $h = \frac{\lambda_f}{\delta}$ est appelé coefficient de transfert conducto-convectif typiquement $h \approx 100 W.m^{-2}.K^{-1}$

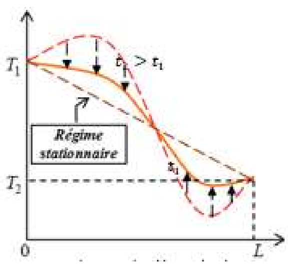
IV- Equation de la chaleur

a) Conduction thermique unidirectionnel (et donc unidimensionnel) $\vec{j} = j_x(x,t)\vec{u_x}$

Dans le cas où le flux n'est lié qu'à la conduction, il suffit d'utiliser l'équation de conservation de l'enthalpie et la loi de Fourier :

b) Commentaires qualitatifs

- Cette équation témoigne de l'irréversibilité de la conduction thermique car elle n'est pas invariante par renversement temporelle $t \to -t$
- En régime stationnaire le profil des températures est linéaire (courbures et variations temporelles sont liées)



- Le temps caractéristique τ de diffusion sur une distance L s'obtient par analyse dimensionnelle $\left|\frac{\partial T}{\partial t}\right| \approx \frac{T}{\tau}$ et $\left|D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right| \approx D\frac{T}{L^2}$ donc $L = \sqrt{D\tau}$. On observe alors une diffusion thermique efficace à petite échelle spatiale

AN : dans le cas du cuivre $D \approx 10^{-4} m^2.s^{-1}$, si on chauffe pendant $\tau = 1s$ alors $L = 1cm$ et si $\tau = 100s$ alors $L = 10cm$: la conduction n'est efficace que sur des petites échelles spatiales.

```
def explicite_matrice():
    M=np.zeros((Nx,Nx))
    M[0,0]=M[-1,-1]=1-K
    M[0,1]=M[-1,-2]=K
    B=np.zeros((Nx))
    B[0]=P*Te/(rho*c*delta)
    B[-1]=-P*Te/(rho*c*delta)
    for i in range(1,Nx-1):
        M[i,i]=1-2*K
        M[i,i-1]=M[i,i+1]=K
    for i in range(Nt-1):
        T[:,i+1]=np.dot(M,T[:,i])+B
    #évolution temporelle de quelques températures en différents points
    for i in range(Nx):
        plt.plot(t,T[i,:])
        plt.xlabel("temps")
        plt.ylabel("température(°C)")
        plt.title("température à différentes positions")
    plt.show()
    #température aux extrémités en régime établi
    plt.plot(x,T[:,Nt-1])
    plt.xlabel("position")
    plt.ylabel("température à différentes positions")
    plt.title("température à différentes positions en regime établi")
    plt.show()
    #évolution spatio-remporelle
    tab_t,tab_x=np.meshgrid(t,x)
    fig = plt.figure()
    ax = fig.gca(projection='3d')  # Affichage en 3D
    ax.plot_surface(tab_x, tab_t, T, cmap=plt.cm.coolwarm, linewidth=0)  # Tracé d'une surface
    plt.title("Tracé d'une surface")
    ax.set_xlabel('distance(m)')
    ax.set_ylabel('temps')
    ax.set_zlabel('T(°C)')
    plt.tight_layout()
    plt.show()

explicite_matrice()
```