

Chapitre 8 : Conduction thermique et transfert convectif

I- Le flux (ou puissance) thermique

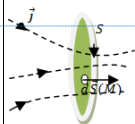
a) Les trois modes de transferts thermiques

Convection	Rayonnement	Diffusion thermique ou conduction thermique
Transfert propre aux fluides assuré par un mouvement macroscopique (naturelle ou forcée) : chaque particule de fluide transporte son énergie interne en se déplaçant	Transfert lié au flux lumineux d'une source de photons d'énergie $h\nu$ et dont la propagation ne nécessite aucun support (h constante de Planck et ν fréquence du rayonnement)	Transfert thermique qui a pour origine un champ de température inhomogène et décrivant la propagation de proche en proche de l'agitation thermique

b) Le vecteur densité de flux de chaleur (ou densité de flux thermique)

Pour les trois modes de transfert thermique, on peut définir un vecteur densité de flux thermique (homogène à une puissance surfacique), notée \vec{j} (en $W.m^{-2}$) permettant de caractériser le flux d'énergie (c'est-à-dire la puissance P_{th}) à travers une surface de contrôle S ouverte et orientée :

$$P_{th} = \frac{\delta Q}{dt} = \iint_S \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$



Dans le cas d'un bilan de puissance effectué sur une surface fermée délimitant un volume V (on note $P_{th,e} > 0$ la puissance qui rentre et $P_{th,s} < 0$ la puissance sortante) :

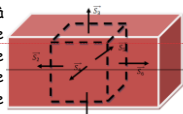
$$\frac{\delta Q}{dt} = P_{th,e} + P_{th,s} = P_{th,e} - |P_{th,s}|$$

$$\frac{\delta Q}{dt} = \iint \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}_{int}(M) = - \iint \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}_{ext}(M)$$

II- Conduction thermique dans un solide

a) Bilan global

On étudie la conduction thermique à l'intérieur d'un solide, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c dépourvue de source interne de chaleur (pas de résistance chauffante ou de réactions chimiques ou nucléaires). Nous supposons le processus monobare :



Soit V le volume de notre système fermé, alors pendant dt :

$$H(t + dt) - H(t) = \delta Q = (P_{th,e} - |P_{th,s}|)dt$$

$$\frac{dH}{dt} = (P_{th,e} - |P_{th,s}|)$$

Ainsi, en régime stationnaire :

$$P_{th,e} = |P_{th,s}|$$

Bilan local

$$dH(M, t + dt) - dH(M, t) = \sum \vec{j}_i \cdot d\vec{S}_{i, int} dt$$

$$\frac{\partial dH}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho h dV}{\partial t} dt = -div \vec{j} dV dt$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -div \vec{j}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -div \vec{j}$$

Bilan global

$$dH = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}_{int} dt = - \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}_{ext} dt$$

$$\frac{dH}{dt} = - \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}_{ext} = - \iiint div \vec{j} dV$$

En régime stationnaire, l'équation bilan conduit à $div \vec{j} = 0$: le vecteur densité de flux thermique est à flux conservatif

Commenté [A1]: Comment évacuer efficacement la chaleur ? Pourquoi est-il plus agréable de marcher sur de la moquette que sur un carrelage pourtant à la même température ?
Expérience : <https://cpinettes.u-cergy.fr/Videos-Thermo.html>
Conduction dans une tige

Commenté [A2]: Vidéos présentant les trois modes. La conduction est donc le seul mode de transfert thermique dans un solide opaque

Commenté [A3]: Dans le cas d'une convection naturelle, la poussée d'Archimède aide au brassage en favorisant l'ascension des tranches « chaudes » remplacées par des tranches froides. La convection forcée s'observe avec des sèches cheveux, lorsque l'on souffle sur un aliment chaud, l'eau d'un chauffage sanitaire...

Commenté [A4]: $h \approx 10^{-34} Js$
Le sable chaud d'une plage est la manifestation de ce type de chauffage. Nous étudierons l'énergie électromagnétique et sa propagation en électromagnétisme

Commenté [A5]: C'est par collision que cette propagation se fait : il nécessite donc un milieu !

Commenté [A6]: En EM, ce vecteur est plutôt appelé vecteur de Poynting

Commenté [A7]: On peut faire une grande analogie avec le vecteur densité de flux de masse et le débit massique !

Commenté [A8]: Cette puissance peut donc être comptée positivement ou négativement

Commenté [A9]: On rappelle que le théorème d'Ostrogradski impose une convention générateur alors que la thermodynamique est en convention récepteur.

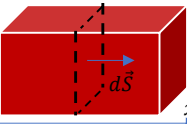
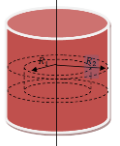
Commenté [A10]: Il y a donc une analogie forte avec le bilan de masse du chapitre 6 ! Nous conservons donc la même présentation

Commenté [AM11]: Ce bilan envisage un vecteur densité de flux de chaleur défini en tout point de l'élément mésoscopique : ce qui introduit l'opérateur divergent. Si on doit également prendre en compte un transfert conducto-convectif, il convient de reprendre ce bilan de puissance.

Commenté [AM12]: A l'intérieur du solide, c'est le seul mode de transfert thermique à prendre en considération mais le rayonnement et la convection peuvent intervenir en surface)

b) Exemples en régime stationnaire

Résolution numérique sur Python

<p>Conduction stationnaire unidirectionnelle et unidimensionnelle : $\vec{j} = j(x)\vec{u}_x$ avec $d\vec{S} = dS\vec{u}_x$</p>  <p>Si la section S du matériau est constante alors : $P_{th} = j(x)S$ Donc $j = \frac{P_{th}}{S} = Cte$ et j uniforme</p>	<p>Conduction stationnaire radiale à symétrie cylindrique : $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ avec $d\vec{S} = dS\vec{u}_r$</p>  <p>Pour une hauteur H de matériau comprise entre R_1 et R_2 $P_{th}(r) = j(r)2\pi rH$ Donc $j(r) = \frac{P_{th}}{2\pi rH}$ j n'est donc pas uniforme</p>
---	---

c) Bilan local

Un bilan enthalpique sur un élément de volume $dV = dx dy dz$ et pour une conduction thermique unidirectionnelle telle que $\vec{j} = j_x(x, y, z, t)\vec{u}_x$ (en repérage cartésien) aboutit à :

$$dH(M, t + dt) - dH(M, t) = \int_V (j_x(x, y, z, t)\vec{u}_x \cdot d\vec{u}_x - j_x(x + dx, y, z, t)\vec{u}_x \cdot d\vec{u}_x) dy dz dx$$

$$\frac{\partial dH}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho h dV}{\partial t} dt = - \frac{\partial j_x}{\partial x} dV dt$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

III- Loi de Fourier et de Newton

a) Énoncé de la loi de Fourier

Expérimentalement, on observe une conduction thermique lorsqu'un milieu présente une inhomogénéité spatiale de la température. Ce flux est alors dirigé des régions les plus chaudes vers les régions les plus froides.

La loi phénoménologique la plus simple (linéaire) traduisant ces observations est la loi de Fourier. Cette loi définit le vecteur densité de flux thermique telle que : $\vec{j} = -\lambda \text{grad}T$ où λ est une quantité scalaire positive appelée conductivité thermique (en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$).

Rq : Nous allons considérer des milieux pour lesquels λ est uniforme. Par exemple : $\lambda_{m\acute{e}tal} \approx 100 W m^{-1} \cdot K^{-1}$, $\lambda_{eau} \approx 1 W m^{-1} \cdot K^{-1}$ et $\lambda_{air} \approx 0,01 W m^{-1} \cdot K^{-1}$ (dans les conditions usuelles).

<p>Conduction stationnaire unidirectionnelle et unidimensionnelle : $\vec{j} = j(x)\vec{u}_x$ avec $d\vec{S} = dS\vec{u}_x$</p> <p>$-\lambda \frac{dT}{dx} = j = \frac{P_{th}}{S}$ si S constant alors : $T(x_1) - T(x_2) = \frac{P_{th}}{\lambda S} (x_2 - x_1)$</p>	<p>Conduction stationnaire radiale à symétrie cylindrique : $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ avec $d\vec{S} = dS\vec{u}_r$</p> <p>$-\lambda \frac{dT}{dr} = j = \frac{P_{th}}{2\pi r H}$ Donc : $T(R_1) - T(R_2) = \frac{P_{th}}{2\pi H \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}$</p>
---	--

En régime stationnaire, de part et d'autre d'une paroi présentant une dT , nous pourrions écrire $\Delta T = R_{th} P_{th}$ où P_{th} la puissance traversant la paroi envisagée et R_{th} est la résistance thermique entre ces deux points ($[R_{th} = K \cdot W^{-1}]$)

Considérons une tige assujettie à un transfert thermique à ses deux extrémités. On règle la situation pour que la puissance qui rentre et qui sort de la tige soient les mêmes. Cette tige est calorifugée le long de toute sa surface latérale : la conduction thermique est donc unidirectionnelle (et unidimensionnelle).

Dans la tige, le bilan enthalpique donne : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x}$

La loi de Fourier impose : $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

Donc : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Numériquement, on va « découper » la tige en cellules de longueur δ : on affecte à chaque cellule i une température à l'instant t notée $T_i(t)$

$$\frac{\partial T_i(t)}{\partial t} \equiv \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} \equiv \frac{\lambda}{\rho c} \frac{(T_{i+1}(t) - T_i(t)) - (T_i(t) - T_{i-1}(t))}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial T_i(t)}{\partial t} \equiv \frac{\lambda}{\rho c} \frac{(T_{i+1}(t) + T_{i-1}(t) - 2T_i(t))}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial T_i(t)}{\partial t} \equiv K(T_{i+1}(t) + T_{i-1}(t) - 2T_i(t))$$

En introduisant un vecteur $\vec{T} = \begin{pmatrix} T_0(t) \\ \vdots \\ T_i(t) \\ \vdots \\ T_{N_x-1}(t) \end{pmatrix}$, ce problème se ramène à celui d'un problème de Cauchy $\frac{d\vec{T}}{dt} = f(\vec{T}, t)$

Ce bilan doit être repris aux extrémités afin de prendre en compte les flux thermiques PS rentrant et sortant.

En $x = 0$, avec $dV = S\delta$

$$\rho c \left(\frac{dT}{dt} \right)_{x=0} dV = -j(x=0)S + PS = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} S + PS$$

$$\left(\frac{dT}{dt} \right)_{x=0} = \frac{\lambda}{\rho c \delta} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} + \frac{P}{\rho c \delta} = K(T_1(t) - T_0(t)) + \frac{P}{\rho c \delta}$$

En $x = L$:

$$\left(\frac{dT}{dt} \right)_{x=L} = -K(T_i(t) - T_{L-\delta}(t)) - \frac{P}{\rho c \delta}$$

On échantillonne également le temps, si on prend un schéma d'Euler explicite alors :

$$\begin{pmatrix} T_{i=0}(t_{i+1}) - T_{i=0}(t_i) \\ \vdots \\ T_i(t_{i+1}) - T_i(t_i) \\ \vdots \\ T_{i=L-\delta}(t_{i+1}) - T_{i=L-\delta}(t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K & K & & & \\ K & -2K & K & & \\ & K & -2K & K & \\ & & K & -2K & K \\ & & & K & -2K & K \\ & & & & K & -2K & K \\ & & & & & K & -2K & K \\ & & & & & & K & -2K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{i=0}(t_i) \\ \vdots \\ T_i(t_i) \\ \vdots \\ T_{i=L-\delta}(t_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P}{\rho c \delta} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{P}{\rho c \delta} \end{pmatrix}$$

Soit : $\vec{T}(t_{i+1}) = \vec{T}(t_i) + T_e M \vec{T}(t_i) + \vec{B}$

Dans la suite on posera $K \rightarrow T_e K$

$$\begin{pmatrix} T_{i=0}(t_{i+1}) \\ \vdots \\ T_i(t_{i+1}) \\ \vdots \\ T_{i=L-\delta}(t_{i+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-K & K & & & \\ K & 1-2K & K & & \\ & K & 1-2K & K & \\ & & K & 1-2K & K \\ & & & K & 1-2K & K \\ & & & & K & 1-2K & K \\ & & & & & K & 1-2K & K \\ & & & & & & K & 1-2K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{i=0}(t_i) \\ \vdots \\ T_i(t_i) \\ \vdots \\ T_{i=L-\delta}(t_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{PT_e}{\rho c \delta} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{PT_e}{\rho c \delta} \end{pmatrix}$$

Commenté [AM13]: Avec la loi de Fourier, une conduction unidirectionnelle est nécessairement unidimensionnelle. Ce modèle décrit convenablement la situation d'une diffusion thermique à travers un mur (en négligeant les effets de bords).

Commenté [AM14]: Ce résultat est en accord avec la conservation de l'énergie !

Commenté [AM15]: Nous avons vu que si la température varie de dT alors $dh = c dT$ donc $h = CT + Cte$ Donc $\frac{\partial h}{\partial t} = C \frac{\partial T}{\partial t}$

Commenté [A16]: Conformément au second principe

Commenté [AM20]: Ce schéma peut ne pas être stable si $\frac{\lambda}{\rho c \delta^2} T_e > 1$

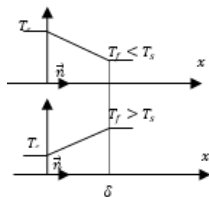
Commenté [A17]: \vec{j} est donc perpendiculaire aux isothermes et dirigés vers les températures les plus faibles.

Commenté [AM18]: Avec la loi de Fourier, une conduction unidirectionnelle est nécessairement unidimensionnelle. Ce modèle décrit convenablement la situation d'une diffusion thermique à travers un mur (en négligeant les effets de bords).

Commenté [A19]: Il est notable de remarquer que pour ce problème unidirectionnel, la température varie linéairement dans l'espace. On pourra remarquer que si $\Delta T > 0$ alors $P_{th} > 0$ et que si $\Delta T < 0$ alors $P_{th} < 0$. Dans les deux cas $R_{th} > 0$

b) Loi de Newton : le transfert conducto-convectif

Pour un solide en contact avec un fluide à la température T_f (et de conductivité λ_f), on observe une couche limite d'épaisseur δ (typiquement du 1/10mm) dans laquelle la température évolue de la température de surface T_s du solide à la température T_f .



Pour traduire ce transfert thermique on utilise la loi de Fourier en supposant le profil ci-contre : $j = \frac{\lambda(T_s - T_f)}{\delta} \vec{n} = h(T_s - T_f) \vec{n}$ où \vec{n} est un vecteur unitaire orienté vers la normale sortante du solide et $h = \frac{\lambda_f}{\delta}$ est appelé coefficient de transfert conducto-convectif typiquement $h \approx 100 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$

IV- Equation de la chaleur

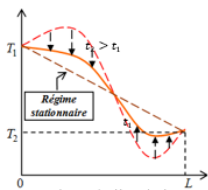
a) Conduction thermique unidirectionnel (et donc unidimensionnel) $j = h_c(x, t) \vec{u}_x$

Dans le cas où le flux n'est lié qu'à la conduction, il suffit d'utiliser l'équation de conservation de l'enthalpie et la loi de Fourier :

$$\left\{ \begin{aligned} j &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial j}{\partial x} \end{aligned} \right. \text{ soit } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ on définit la diffusivité thermique } D = \frac{\lambda}{\rho c} \text{ ([D] = m}^2 \cdot \text{s}^{-1}\text{). Ainsi l'équation de la diffusion s'écrit } \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

b) Commentaires qualitatifs

- Cette équation témoigne de l'irréversibilité de la conduction thermique car elle n'est pas invariante par renversement temporelle $t \rightarrow -t$
- En régime stationnaire le profil des températures est linéaire (courbures et variations temporelles sont liées)



- Le temps caractéristique τ de diffusion sur une distance L s'obtient par analyse dimensionnelle $\left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| \approx \frac{T}{\tau}$ et $\left| D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right| \approx D \frac{T}{L^2}$ donc $L = \sqrt{D\tau}$. On observe alors une diffusion thermique efficace à petite échelle spatiale

AN : dans le cas du cuivre $D \approx 10^{-4} m^2 \cdot s^{-1}$, si on chauffe pendant $\tau = 1s$ alors $L = 1cm$ et si $\tau = 100s$ alors $L = 10cm$: la conduction n'est efficace que sur des petites échelles spatiales.

```
#constante"
lamb =100
pau=10**4
c=400
L=1
Nx=15
delta=L/Nx
duree=10000
Nt=1000
Te=duree/Nt
K=lamb*Te/(pau*c*delta**2)
Tc=50
Tf=0
P=10000
Tinitial=25

#méthode d'euler explicite
A=np.zeros((Nx,Nx))
A[0,0]=1-K
A[0,1]=K
A[Nx-1,Nx-1]=1-K
A[Nx-1,Nx-2]=K

for i in range(1,Nx-1):
    A[i,i]=1-2*K
    A[i,i-1]=A[i,i+1]=K
B=np.zeros((Nx))
B[0]=P*Te/(pau*c*delta)
B[Nx-1]=-P*Te/(pau*c*delta)

#calcul du champ des températures
T=np.zeros((Nx,Nt))
T[:,0]=Tinitial

for i in range(Nt-1):
    T[:,i+1]=np.dot(A,T[:,i])+B

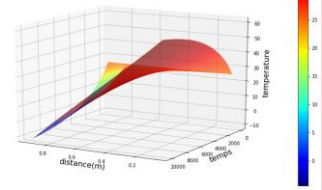
print(T)
```

Commenté [AM21]: C'est dans c cette couche que s'opère la convection

Commenté [A22]: S'il faut rajouter un autre type de transfert (conducto-convectif, réaction exothermique...) alors il ne faut pas utiliser l'équation de la chaleur sous forme ci-contre mais reprendre un nouveau bilan enthalpique

Commenté [AM23]: Nous envisagerons le cas d'une conduction thermique et conducto-convective en TD

Commenté [AM27]: Avec un graphe 2D :



Commenté [A24]: Diffusion thermique, particulaire, de vitesse

Commenté [A25]: Nous étudierons plus en détail ce type d'équation. Cependant, on pourra noter déjà que l'équation de la diffusion est linéaire : la combinaison de deux solutions particulières, l'utilisation d'une condition initiale et de deux conditions aux limites (si la situation est unidimensionnelle et unidirectionnel) permettent de proposer la solution au problème (résultat de Cauchy).

On peut utiliser plusieurs méthodes de résolution :
 - Par analyse dimensionnelle
 - Par la méthode de séparation des variables (parfait pour utiliser les conditions initiales et limites)
 - En proposant une solution de type onde plane progressive harmonique (parfait pour décrire un régime d'excitation sinusoïdale)

La solution exacte est donnée par une expression du type $T(x, t) \propto \frac{e^{-x^2/4Dt}}{\sqrt{t}}$

Commenté [A26]: Ce que mesure le 2nd principe :
 $dU = \delta Q = T dS = T \left(\frac{\delta Q}{T_{ext}} + \delta S_c \right)$
 $T \delta S_c = \delta Q \left(1 - \frac{T}{T_{ext}} \right)$

